

תאריך המבחן: 29.01.2020
 מרצה: פקוביץ', זוריאב, ברומברג
 שם הקורס: חדר"א ג' 1
 מס' הקורס: 9141 - 1 - 201
 סמסטר: א'
 מועד: א'

משך הבחינה: שלוש שעות
 חומר עזר: דף נוסחאות מצורף.

אסור להשתמש במחשבון

הוראות:

- הניקוד המירבי בבחינה הינו 105 נקודות. מי שיצבור 100 נקודות או יותר, ציונו יהיה 100.
- בבחינה שני חלקים. בחלק א' יש 3 שאלות. משקל כל שאלה בחלק א' - 20 נקודות.
- בחלק ב' ישנן 5 שאלות בחירה מרובה. משקל כל שאלה בחלק ב' - 9 נקודות.
- נא לכתוב פתרונות מלאים ומנומקים היטב ובכתב יד קריא בדפים מיועדים לכך בלבד.
- לטיוטה יש להשתמש רק במחברת הטיוטה. מחברת טיוטה עוברת לגריסה בסוף המבחן ולא תיבדק.
- בחלק ב' יש לסמן את התשובות בטבלה בעמוד זה - תשובה אחת בלבד לכל שאלה. תשובות מרובות תפסלנה!
- בסוף המבחן יש המישה דפי עזר.

שאלה	1	2	3	4	5
תשובה א'		////	✓		✓
תשובה ב'				////	
תשובה ג'	✓				
תשובה ד'		✓		✓	
תשובה ה'					

✓ ✓ ✓ ✓ ✓

חלק א'
 נשאל כל שאלת 20 נקודות.

1. חקרו את הפונקציה $y = \frac{e^{2x}}{x}$ לפי הסעיפים הבאים:

- ✓ (א) תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות, איזוגיות
- ✓ (ב) רציפות, נקודות אידרציפות
- ✓ (ג) אסימטוטות
- ✓ (ד) תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון
- ✓ (ה) תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול
- ✓ (ו) תיאור גרפי.

$y=0$
 $\frac{e^{2x}}{x} = 0 \cdot x$

$\frac{0}{\infty}$

$e^{2x} = 0$

נסת' ∞
 סב' ∞
 חק' ∞

$x=0$
 נסת'
 מסת'
 חקרה

$\frac{0}{0}$

(כ) מחום מוגדר: $x \neq 0$

נקודת חיתוך עם הצירים:

$f(-x) = \frac{e^{-2x}}{-x} = \frac{-1}{x e^{2x}} \neq f(x)$

לא זוגית/לא איזוגית
 הפונ' אינ' זוגית

$-f(x) = -\frac{e^{2x}}{x} \neq f(-x)$

הפונ' אינ' זוגית-לא

↓
הפונ' זוגית

(שורשם ממוקצט לזמנים)

(פ) תחום הגדרה: הפונ' אומג'רית ולכן תחום הגדרה כל מחום הממ'רית:

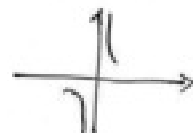
$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

נקודת אי רציפות: נבדוק מס'ם הנקודה $x=0$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}}{x} = \left[\frac{e^0}{0^+} \right] = \frac{1}{0^+} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}}{x} = \left[\frac{e^0}{0^-} \right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$

נקודת אי רציפות מס'ם זוגית



$X=0$: א' ב' כ' : א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' (e)

$$y = ax + b$$

: מסו' ל' N

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right. = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{t}}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \cdot e^{\frac{2}{t}} \left[0 \cdot e \right]$$

$= 0 \cdot \infty \rightarrow$ **ל' ד' ח' ט' פ' צ'**
+ נ' נ' ז' ז'
- א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
{0, \infty} ס' י' כ'
 x \rightarrow $+\infty$ - t \rightarrow 0 \rightarrow $+\infty$ \rightarrow t \rightarrow 0
ס' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \checkmark \quad e^{-\infty} \rightarrow 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x} - 0 \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\left. \begin{array}{l} -\infty \rightarrow t \text{ ה' ו' ז' ח' ט' } \\ \text{ס' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' } \\ \text{א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' } \end{array} \right\} \text{ס' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' ה' ו' ז' ח' ט'}$

$y=0$

א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{2x \cdot e^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' (?)

$$\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$\frac{-}{\downarrow 0} \quad \frac{-}{\downarrow} \quad \frac{+}{\uparrow \frac{1}{2}}$$

א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
 $x=0$
 $x=\frac{1}{2}$

$$e^{2x} = 0 \quad \left(\infty \right)$$
$$2x-1=0$$
$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$x = -1$$
$$y' = \frac{e^{2(-1)}(-2-1)}{(-1)^2} = \frac{-3}{e^2} < 0$$

$$x = 1$$
$$y' = \frac{e^{2(1)}(2-1)}{1} = +e^2 > 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$
$$y' = \frac{e^{2(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 16\sqrt{e} \cdot (-\frac{1}{2}) < 0$$

$$y = \frac{e^1}{\frac{1}{2}} = 2e$$

$x = \frac{1}{2}$: א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
 $\left[\frac{1}{2}, 2e \right) \text{ min}$

א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
 $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$ ✓
א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'
 $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2} \right)$

א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט'

(7) נמצא קטריה וקטריה של הפונקציה

$$f''(x) = \frac{[e^{2x} \cdot 2(2x-1) + 2e^{2x}]x^2 - 2x(e^{2x}(2x-1))}{x^4}$$

$$= \frac{x^2(2e^{2x}(2x-1) + 2e^{2x}) - 2x(e^{2x}(2x-1))}{x^4} = \frac{x^2(2e^{2x}(2x-1+1)) - 4x^2e^{2x} + 2xe^{2x}}{x^4}$$

$$= \frac{4x^3e^{2x} - 4x^2e^{2x} + 2xe^{2x}}{x^4} = \frac{2xe^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^4} = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3} = 0 / x^3$$

$2e^{2x} = 0$ (אין פתרון)

$2x^2 - 2x + 1 = 0$

ϕ

אין פתרון

בנקודות קטריה וקטריה:
 נמצא את הנקודות:

$$\frac{-}{\wedge} \quad \frac{+}{\vee}$$

$x=1$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot e^2 (2 - 2 + 1)}{1} = 2e^2 > 0$$

$x=-1$

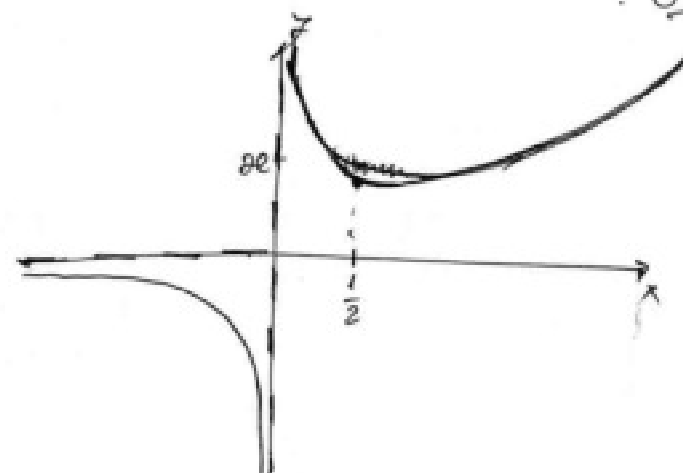
$$f''(x) = \frac{2 \cdot e^{-2} (2 + 2 + 1)}{-1} = \frac{10}{-e^2} < 0$$

קטריה של הפונקציה:
 $x \in (-\infty, 0)$

קטריה של הפונקציה:
 $x \in (0, +\infty)$

(8) נמצא קטריה וקטריה של הפונקציה

18/20



2. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $y = \sqrt[3]{x}(1+2x)$ בקטע $[-8, 1]$

$y = X^{\frac{1}{3}}(1+2X)$ → הפונקציה מוגדרת על כל הממשים.

$$y' = \frac{1}{3} X^{-\frac{2}{3}}(1+2X) + X^{\frac{1}{3}} \cdot 2 = \frac{1+2X}{3 \cdot \sqrt[3]{X^2}} + 2\sqrt[3]{X} = \frac{1+2X+6X}{3\sqrt[3]{X^2}} = \frac{1+8X}{3\sqrt[3]{X^2}}$$

נבדוק את נקודות הקיצון, נקודות קצה ותחילת הקטע:

$$\frac{1+8X}{3\sqrt[3]{X^2}} = 0 \quad | \cdot 3\sqrt[3]{X^2}, X \neq 0$$



Min: $x = -\frac{1}{8}$
 $(-\frac{1}{8}, -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})$

$$1+8X=0$$

$$8X=-1$$

$$X=-\frac{1}{8}$$

$$X=1$$

$$y' = \frac{1+8}{3 \cdot 1} > 0$$

$$X = -\frac{1}{16}$$

$$y' = \frac{1-\frac{8}{16}}{3\sqrt[3]{(-\frac{1}{16})^2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{64}}} > 0$$

$$X=-1$$

$$y' = \frac{1-8}{3 \cdot 1} < 0$$

$$X = -\frac{1}{8}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}(1-\frac{2}{8}) = -\sqrt[3]{\frac{1}{8}}(\frac{6}{8}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

נקודות קצה:

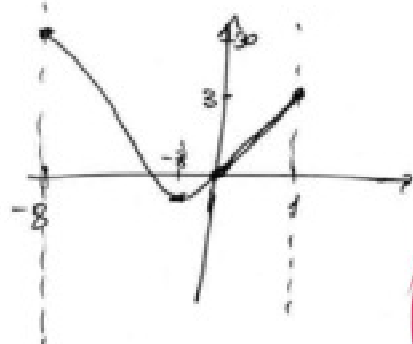
$$X=1$$

$$y = 1(1+2) = 3$$

למה ואין נקודה Max מקומית נבדוק את ערכי הפונקציה בקצה המזרחי:

$$X=-8$$

$$y = -2(1+2 \cdot (-8)) = -2(1-16) = -2(-15) = 30$$



20
20

הפונקציה מוגדרת על כל הממשים. הפונקציה מוגדרת על כל הממשים. הפונקציה מוגדרת על כל הממשים.

נקודות קצה: $x=1$ ו- $x=-8$. נקודות קצה: $x=1$ ו- $x=-8$. נקודות קצה: $x=1$ ו- $x=-8$.

נקודות קצה: $x=1$ ו- $x=-8$. נקודות קצה: $x=1$ ו- $x=-8$. נקודות קצה: $x=1$ ו- $x=-8$.

הפונקציה מוגדרת על כל הממשים. הפונקציה מוגדרת על כל הממשים. הפונקציה מוגדרת על כל הממשים.

הערך המקסימלי הוא: $y=30$
 הערך המקסימלי הוא: $y=-\frac{3}{8}$

2) $(x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2$

$\int \left(\frac{x^2 - x - 4}{(x-1)(x^2 + 2x + 1)} + e^{2x} x^2 \right) dx.$

$\frac{x^2 - x - 4}{(x-1)(x+1)^2} \Rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$

$A(x+1)^2 + B(x^2 - 1) + C(x-1) = x^2 - x - 4$

$x=1$

$4A + 0 + 0 = 1 - 1 - 4$

$4A = -4$

$A = -1$

$x=-1$

$0 + 0 - 2C = 1 + 1 - 4$

$-2C = -2$

$C = 1$

$x=0$

$-1 - B + 1 = 0 - 0 - 4$

$-B = -2$

$B = 2$



$\frac{x^2 - x - 4}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$\int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + e^{2x} x^2 \right) dx = - \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int e^{2x} x^2 dx = \text{4} + \text{5}$

~~$\int \frac{dx}{x-1}$~~

$x-1=t$
 $dt=dx$

$t=x+1$
 $dt=dx$

$-\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|x-1| + c$

$2 \int \frac{dt}{t} = 2 \ln|t| + c = 2 \ln|x+1| + c$

$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int (x+1)^{-2} dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x+1} + c$

$\int e^{2x} x^2 dx = \left\{ \begin{matrix} u=x^2 & dv=e^{2x} dx \\ du=2x dx & v=\frac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right\} = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2x dx = \left\{ \begin{matrix} u=x & dv=e^{2x} dx \\ du=dx & v=\frac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right\} =$
 $= x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \left(x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right) =$

2 חלקים
10/10

$$= X^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - X \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} \left(\frac{X^2}{2} - X + \frac{1}{2} \right) + C$$

✓

$$\textcircled{19} \frac{1}{5} \left[\ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \frac{1}{(x+1)} + \frac{e^{2x}}{2} (X^2 - X + 1) + C \right]$$

$\frac{1}{2}$

19/20

חלק ב'
משקל כל שאלה 9 נקודות.

1. אם $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x}$ אזי בסביבה של 0 מתקיים

(א) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$

(ב) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$

(ג) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)$

(ד) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

(ה) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^3)$

2. השטח החסום על ידי העקומות $y(x) = 5x - x^2$ ו- $y(x) = 2x$ שווה ל-

(א) $\frac{25}{6}$

(ב) 1

(ג) $\frac{45}{2}$

(ד) $\frac{9}{2}$

(ה) $\frac{27}{2}$

3. תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$. מה מתבאים חייב להיות נכון?

(א) קיים M כך ש- $f(x) < M$ לכל x ששייך ל- $[a, b]$

(ב) $f(x)$ לא גזירה בקטע (a, b)

(ג) $f(x)$ גזירה בקטע (a, b)

(ד) $f(x)$ מקיימת את התנאי המשפט רול בקטע $[a, b]$

(ה) $f(x)$ מקיימת את התנאי המשפט לגרנוי בקטע $[a, b]$

4. תהי $f(x)$ גזירה בקטע (a, b) . מה מתבאים חייב להיות נכון?

(א) $f(x)$ מונוטונית ב- (a, b)

(ב) $f'(x)$ רציפה ב- (a, b)

(ג) $f(x)$ מונוטונית עולה ב- (a, b)

(ד) $f(x) + \sin(x)$ רציפה ב- (a, b)

(ה) קיים $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$

5. הנגזרת $y'(0)$ של הפונקציה הסתומה $y(x)$ המוגדרת על ידי המשוואה

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + y\right) - y = 0$$

שווה ל-

(א) $-\frac{1}{2}$

(ב) 0

(ג) $\frac{\pi}{6}$

(ד) $1 + \frac{\pi}{6}$

(ה) $\frac{1}{\pi}$