האגודה הסטודנטיאלית
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מספר קורס:362.1.2221

מרצה: ראובן שגב

מתרגל: דלין רונן

יוצר המסמך: שרון פייטן

סוג החומר : סיכום הרצאות

שם הקורס: דינמיקה

2020

באדיבות מדור אקדמיה, אגודת הסטודנטים, אוניברסיטת בן גוריון.
www.bgu4u.co.il

28.10.2019

דינמיקה

מכניקה של חלקיק

קינמטיקה: חקר הגאומטריה של התנועה.

- מקום.
- מהירות.
- תאוצה.

דינמיקה (קינטיקה): חוקי התנועה.

הקשר בין התנועה לכוחות הפועלים על הגוף.

מכניקה של חלקיק

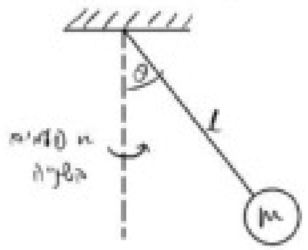
1. קינמטיקה של חלקיק.
2. דינמיקה של חלקיק.

← 3. דינמיקה של מערכת חלקיקים. ←

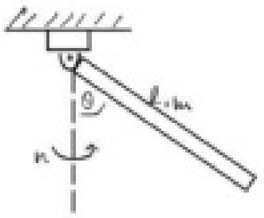
גוף קשיח

4. קינמטיקה של גוף קשיח.
5. דינמיקה של גוף קשיח.

פשוט עם ידע נוכחי -



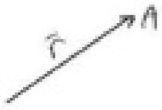
לא פשוט עם ידע נוכחי -



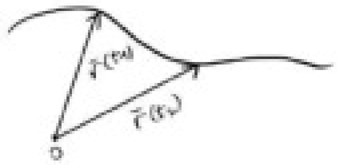
קינמטיקה של חלקיק

מקום של חלקיק:

מקום של חלקיק הוא נקודה במרחב האוקלידי ה-3 ממדי. אנו מציינים את המקום באופן גיאומטרי על ידי בחירת נקודת ראשית ובין וקטור מהראשית לנקודה בה נמצא החלקיק.



תנועה:

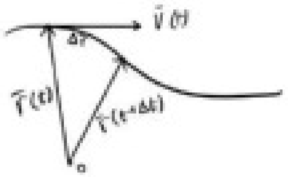


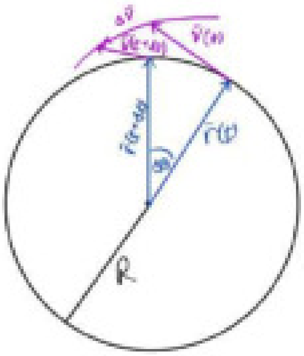
תנועה היא פונקציה שמציינת את מקום החלקיק בתלות הזמן. $\vec{r}=\vec{r}(t)$

מהירות:

המהירות של החלקיק בזמן t היא קצב שינוי המקום בזמן זה. כלומר-

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$





<u>דוגמה</u> - חלקיק נע במסלול מעגלי בעל רדיוס R במהירות בגודל V. מהי תאוצת החלקיק?

נציין $|\bar{V}| = v$ קבוע. התאוצה נוצרת משינוי כיוון המהירות, אך לא שיעורה הקבוע.

$$\bar{a} = \lim \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} \qquad |\bar{a}| = \lim \frac{|\Delta\bar{V}|}{\Delta t}.$$

עבור זווית קטנה, אורך המיתר $|\Delta\bar{V}|$ = אורך הקשת = רדיוס · זווית [rad]. ($V\cdot\Delta\theta$)

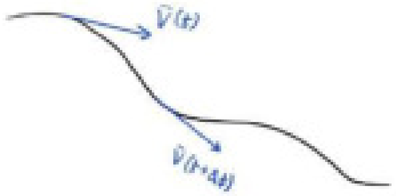
$$|\bar{a}| = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{V\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{V\cdot V}{R} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow |\bar{a}| = R\dot{\theta}^2$$

התאוצה ניצבת למהירות כלפי מרכז המעגל.

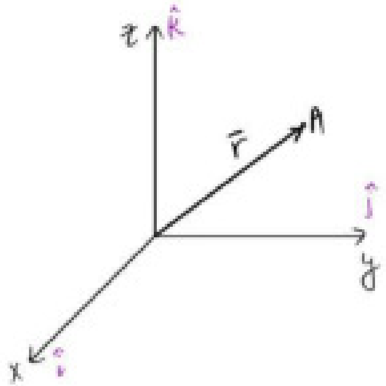
<u>תאוצה:</u>

התאוצה של חלקיק בזמן t היא קצב שינוי המהירות בזמן זה. כלומר-

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\bar{v}(t+\Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t)$$



<u>תיאור תנועה במערכות קואורדינטות שונות</u>



א. מערכת קואורדינטות קרטזית -

x,y,z - הקואורדינטות של נקודה A.

<u>תיאור מקום:</u> $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

<u>תיאור תנועה:</u> $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

<u>תיאור המהירות:</u> $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$

$$\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

$$\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

<u>תיאור התאוצה:</u>

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = \dot{v}_x\hat{i} + \dot{v}_y\hat{j} + \dot{v}_z\hat{k}$$

$$\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

30.10.2019

קינמטיקה של חלקיק

מקום - $\bar{r}$, תנועה - $\bar{r}=\bar{r}(t)$, מהירות - $\bar{v}=\dot{\bar{r}}$, תאוצה - $\bar{a}=\dot{\bar{v}}=\ddot{\bar{r}}$

<u>דוגמה:</u> תנועה במעגל במהירות בגודל קבוע - תאוצה בכיוון המרכז. $|\bar{a}|=\frac{v^2}{R}=R\dot{\theta}^2$

קואורדינטות קרטזיות:

$\bar{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ $\qquad a_x=\ddot{x}=\dot{v}_x$

$\bar{v}(t)=\dot{x}(t)\hat{i}+\dot{y}(t)\hat{j}+\dot{z}(t)\hat{k}$ $\qquad a_y=\ddot{y}=\dot{v}_y$

$\bar{a}(t)=\ddot{x}(t)\hat{i}+\ddot{y}(t)\hat{j}+\ddot{z}(t)\hat{k}$ $\qquad a_z=\ddot{z}=\dot{v}_z$

<u>דוגמה</u> -

נתונה תנועה במישור מיוצגת ע"י המשוואות-

$x(t)=R\cos wt$

$y(t)=R\sin wt$

w,R קבועים (ידועים).

$\bar{r}(t)=R\cos wt\hat{i}+R\sin wt\hat{j}$

$|\bar{r}(t)|=\sqrt{R^2\cos^2 wt+R^2\sin^2 wt}=R\sqrt{\cos^2 wt+\sin^2 wt}=R \Rightarrow$ תנועה על מעגל ברדיוס R.

$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=-wR\sin wt\hat{i}+wR\cos wt\hat{j}$

$|\bar{v}|=wR\sqrt{\sin^2 wt+\cos^2 wt}=wR$

$\bar{v}\cdot\bar{r}=-wR^2\sin wt\cdot\cos wt+wR^2\cos wt\cdot\sin wt=0 \Rightarrow$ הוקטורים מאונכים זה לזה.

$\bar{a}=\dot{\bar{v}}=-w^2R\cos wt\hat{i}-w^2R\sin wt\hat{j}=-w^2\bar{r}=-w^2|\bar{r}|\hat{r}=-w^2R\hat{r}=-\frac{|\bar{v}|^2}{R}\hat{r}$

<u>דוגמה</u> - צריך להוכיח שחלקיק שנע בתאוצה קבועה נע בתנועה מישורית.

נסמן את התאוצה הקבועה של החלקיק ע"י $\bar{a}=\bar{a}_0$. $\qquad a_{0x}\hat{i}+a_{0y}\hat{j}+a_{0z}\hat{k}$

תנועה מישורית: נראה שקיים מישור מסוים במרחב כך שבכל רגע החלקיק נמצא בו.

עבור הזמן $t=0$ נסמן $\bar{v}(t=0)=\bar{v}_0$, $\bar{r}(t=0)=\bar{r}_0$. נחשב את האינטגרל.

$a_x=\dot{v}_x \Rightarrow v_x=\int a_x\,dt=\int a_{0x}\,dt=a_{0x}t+c_x$

נכתוב את $\bar{v}_0$ בצורה הבאה- $\qquad \bar{v}_0=v_{0x}\hat{i}+v_{0y}\hat{j}+v_{0z}\hat{k}$

נכתוב את $\bar{r}_0$ בצורה הבאה- $\qquad \bar{r}_0=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}+z_0\hat{k}$

נציב את תנאי ההתחלה -

$V_x(t=0)=V_{0x}=a_{0x}\cdot 0+C_x \Rightarrow C_x=V_{0x}$

$V_x=a_{0x}t+V_{0x}$

$V_y=a_{0y}t+V_{0y}$

$V_z=a_{0z}t+V_{0z}$

$\vec V=(a_{0x}\hat i+a_{0y}\hat j+a_{0z}\hat k)\cdot t+\vec V_0=\vec a_0 t+\vec V_0$

$V_x=\dot x \Rightarrow x=\int V_x dt \Rightarrow x=\int(a_{0x}t+V_{0x})\,dt=a_{0x}\frac{t^2}{2}+V_{0x}t+D_x$

נציב את תנאי ההתחלה -

$x(t=0)=x_0=a_{0x}\cdot\frac{0^2}{2}+V_{0x}\cdot 0+D_x \Rightarrow D_x=x_0$

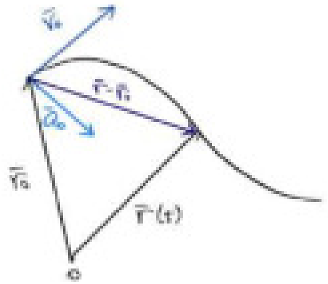
$x=a_{0x}\frac{t^2}{2}+V_{0x}t+x_0$

$y=a_{0y}\frac{t^2}{2}+V_{0y}t+y_0$

$z=a_{0z}\frac{t^2}{2}+V_{0z}t+z_0$

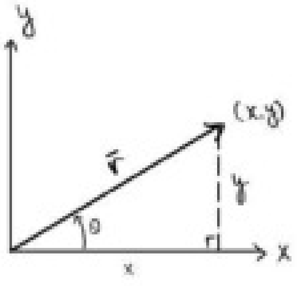
$\vec r=\vec a_0\frac{t^2}{2}+\vec V_0 t+\vec r_0$

$\vec r-\vec r_0=\frac{t^2}{2}\vec a_0+t\vec V_0$



* מסקנה - הוקטור $\vec r-\vec r_0$ נמצא <u>תמיד</u> במישור שנפרש ע"י הוקטורים $\vec a_0,\vec V_0$.

לסיכום: החלקיק נמצא על המישור שנפרש ע"י V_0, a_0 ועובר בנקודה $\vec r_0$.



<u>תיאור תנועה במישור בקואורדינטות פולריות</u>

הקואורדינטות הפולריות -

$r=|\vec r| \quad (\rho=|\vec r|)$

$\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\vec r=r\cos\theta\,\hat i+r\sin\theta\,\hat j$

נתאר תנועה בקואורדינטות פולריות - אנחנו צריכים לדעת את הפונקציות $r(t),\theta(t)$.

$\vec r(t)=r(t)\hat r(t)$

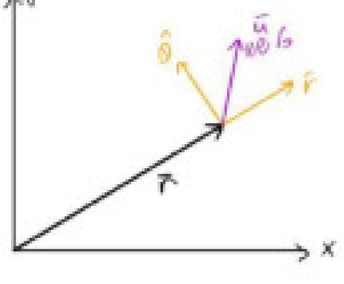
$\hat r=\cos\theta\,\hat i+\sin\theta\,\hat j \Rightarrow \hat r=\hat r(\theta) \Rightarrow \vec r(t)=r(t)\hat r(\theta(t))$

$\vec u=u_r\hat r+u_\theta\hat\theta$

הרכיב הרדיאלי   הרכיב המשיקי

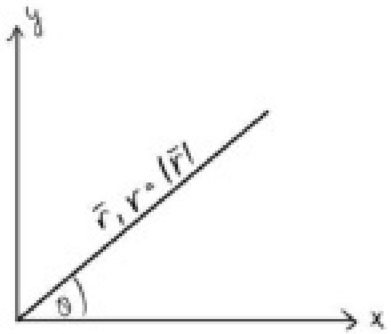
$\hat\theta=\hat\theta(\theta)=-\sin\theta\,\hat i+\cos\theta\,\hat j \Rightarrow \frac{d\hat r}{d\theta}=-\sin\theta\,\hat i+\cos\theta\,\hat j$

$\frac{d\hat\theta}{d\theta}=-\cos\theta\,\hat i-\sin\theta\,\hat j \Rightarrow \frac{d\hat r}{d\theta}=\hat\theta,\ \frac{d\hat\theta}{d\theta}=-\hat r$



4.11.2019

תיאור תנועה בקואורדינטות פולריות



$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$

$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$

$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}\ ,\ \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$

בזמן תנועה - $r = r(t)\ ,\ \theta = \theta(t)$

$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}(t)\hat{r}(\theta(t)) + r(t)\frac{d}{dt}(\hat{r}(\theta(t)))$

$\frac{d}{dt}[\hat{r}(\theta(t))] = \frac{d\hat{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

בתנועה על מעגל - $r = R\ ,\ \dot{r} = 0$

$\bar{V} = R\dot{\theta}\hat{\theta}\ ;\ |\bar{V}| = R\dot{\theta}$

<u>ביטוי עבור התאוצה -</u>

$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}$

$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}\hat{\theta}(\theta(t)) = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r} \Rightarrow \bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

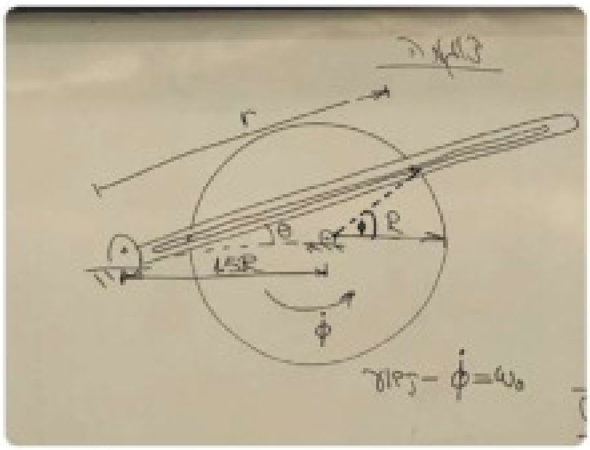
<u>דוגמה -</u> תנועה לאורך קו ישר, $\theta =$ קבוע, $\dot{\theta} = 0$ ולכן $\Leftarrow$ $\ddot{\theta} = 0$ $\qquad \bar{a} = \ddot{r}\hat{r}$

תנועה על מעגל, $r=R$ - קבוע, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ $\qquad \bar{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2}_{\frac{V^2}{R}}\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$

<u>תרגיל -</u>

$\dot{\phi} = \omega_0$ קבוע.

נתונים R, ω_0. דרוש - $\dot{r}, \dot{\theta}, \ddot{r}, \ddot{\theta}$ עבור $\phi = 45°$.



<u>חישוב $\bar{V}, \bar{a}$ בקואורדינטות R, ϕ:</u>

$r^2 = (1.5R + R\cos 45)^2 + (R\sin 45)^2 \Rightarrow r = 2.32R$

$\theta = tg^{-1}\frac{R\sin 45}{1.5R - R\cos 45} = 17.76°$

$\bar{V} = \dot{R}\hat{R} + R\dot{\phi}\hat{\phi} = R\omega_0\hat{\phi}$

$\bar{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\hat{\phi}$

$\bar{a} = -R\omega_0^2\hat{R}$

(1) $\bar{V} = R\omega_0\hat{\phi} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

(2) $\bar{a} = -R\omega_0^2\hat{R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

נכפול את משוואה (1) ב- $\hat{r}$:

$$R\omega_0\hat{\phi}\cdot\hat{r} = \ddot{r}\cdot 1+0 \quad , \hat{\phi}\cdot\hat{r} = \cos(135-17.76) \Rightarrow \dot{r} = -0.458\,\omega_0 R$$

נכפול את משוואה (2) ב- $\hat{\theta}$:

$$R\omega_0\hat{\phi}\cdot\hat{\theta} = 0+r\dot{\theta}\cdot 1 \quad , \hat{\phi}\cdot\hat{\theta} = \cos(45-17.76) \Rightarrow \dot{\theta} = 0.383\,\omega_0$$

$$-R\omega_0^2\hat{R}\cdot\hat{r} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cdot 1+0 \Rightarrow \ddot{r} = -0.549R\omega_0^2$$

$$-R\omega_0^2\hat{R}\cdot\hat{\theta} = 0+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\cdot 1 \Rightarrow \ddot{\theta} = -0.0461\,\omega_0^2$$

<u>תיאור תנועה מרחבי: מקומי</u>

פיתוח התנועה לטור טיילור מסדר 2 -

$$y(x+\Delta x) \cong y(x) + \frac{dy}{dx}(x)\,\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}(x)\,\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}(x)\,\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

$$\bar{r}(t+\Delta t) \cong \bar{r}(t) + \frac{d\bar{r}}{dt}(t)\,\Delta t + \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t)\,\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}(t)\,\frac{\Delta t^3}{3!} + \dots$$

קירוב מסדר אפס - $\bar{r}(t+\Delta t) \cong \bar{r}(t)$

קירוב מסדר ראשון - $\bar{r}(t+\Delta t) \cong \bar{r}(t) + \bar{v}(t)\Delta t$ המהירות קבועה לאורך ישר.

קירוב מסדר שני - $\bar{r}(t+\Delta t) \cong \bar{r}(t) + \bar{v}(t)\Delta t + \bar{a}(t)\frac{\Delta t^2}{2}$ תנועה בתאוצה קבועה.

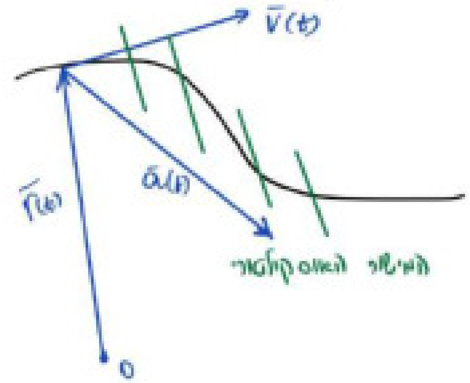
* המישור בו נמצאת התנועה בקירוב מסדר שני - מישור שנפרש ע"י הוקטורים $\bar{v}$ ו- $\bar{a}$, ונקרא המישור האוסקולטורי.

6.11.2019

תיאור תנועה ברכיבי מסלול

קירוב תנועה מסדר ראשון – תנועה לאורך ישר (המשיק) במהירות קבועה.

קירוב תנועה מסדר שני - תנועה בתאוצה קבועה במישור הנפרש ע"י וקטורי המהירות והתאוצה (המישור האוסקולטורי).

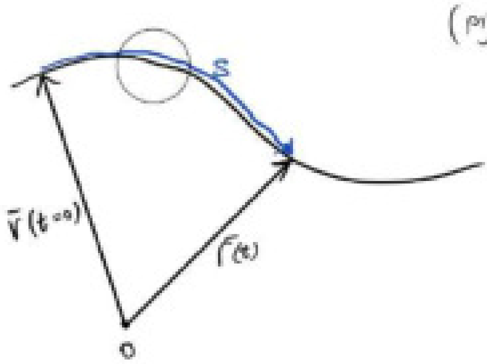


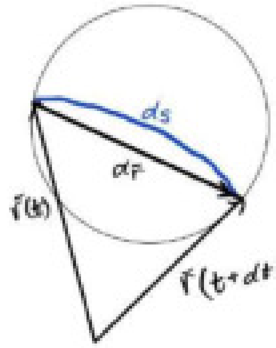
פרמטר אורך הקשת S

(הנחה - המהירות אינה מתאפסת בתחום הזמנים שאנו דנים)

$S=S(t)$ - פרמטר אורך הקשת $S\geq 0$.

S גדל כאשר t גדל.





$$d\bar{r} = \bar{r}(t+dt)-\bar{r}(t)$$

$$\lim_{\substack{(dt\to 0)\\(ds\to 0)}} \frac{|d\bar{r}|}{ds} = 1$$

במילים אחרות -

$$\hat{t} := \lim_{\substack{dt\to 0\\ ds\to 0}} \frac{d\bar{r}}{ds}$$ - וקטור יחידה המשיק למסלול

$\hat{t}$ → tangent

$$\bar{V} := \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

כלל השרשרת

$\bar{r} = \bar{r}(t)$

אבל אפשר לכתוב גם -

$\bar{r}=\bar{r}(s)$ - המקום כתלות המרחק שעברנו

$\bar{r}=\bar{r}(s(t))$ אם כן ניתן לכתוב גם -

$$\boxed{\bar{V} = \dot{s}\,\hat{t}}$$

$\hat{V}=\hat{t}$ $\qquad$ $|\bar{V}|=\dot{s}$

* המהירות היא בכיוון המשיק.

* קצב השינוי של אורך הקשת זה הגודל של וקטור המהירות.

תאוצה בקורד׳ מסלול

$\bar{V} = \dot{S}\hat{t}$

$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{S}\hat{t} + \dot{S}\dot{\hat{t}}$

$\ddot{S}$ - קצב שינוי גודל המהירות.

$\dot{\hat{t}}$ - קצב שינוי כיוון המהירות. (= המשיק).

- תלוי בכמה המסלול עקום.
- תלוי בגודל המהירות.

ניתן לכתוב $\hat{t} = \hat{t}(s)$ - תכונה גיאומטרית של המסלול. בתנועה: $\hat{t} = \hat{t}(s(t))$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\dot{\hat{t}} = \dot{S}\frac{d\hat{t}}{ds}$$

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{S}\hat{t} + \dot{S}^2\frac{d\hat{t}}{ds}}$$

הוקטור $\frac{d\hat{t}}{ds}$

טענה: נניח $\bar{u} = u(p)$ הוא וקטור התלוי בפרמטר p (למשל זמן, למשל s). נניח גם שנתון ש- $|\bar{u}(p)|$ = קבוע.

אזי, $\frac{du}{dp} \perp \hat{u}$ בכל p. כלומר - $\boxed{\frac{d\bar{u}}{dp}\cdot\bar{u} = 0}$

הוכחה: אם $|\bar{u}(p)|$ קבוע אזי $\bar{u}(p)\cdot\bar{u}(p) = |\bar{u}(p)|^2 =$ קבוע.

$$\frac{d}{dp}(\bar{u}(p)\cdot\bar{u}(p)) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dp}(p)\cdot\bar{u}(p) + \frac{d\bar{u}}{dp}(p)\cdot\bar{u}(p) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dp}\cdot\bar{u} = 0$$ לכל p.

מסקנה מהטענה: $\frac{d\hat{t}}{ds}$ ניצב למשיק $\hat{t}$. $\frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{t} = 0$.

נגדיר $\hat{n} = \left(\frac{d\hat{t}}{ds}\right)^{\wedge}$ - וקטור יחידה בכיוון $\frac{d\hat{t}}{ds}$ (normal)

$K = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$ - עקמומיות המסלול - תכונה גיאומטרית של המסלול.

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|\left(\frac{d\hat{t}}{ds}\right)^{\wedge}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = K\hat{n}$$

$\rho := \frac{1}{K}$ - רדיוס העקמומיות.

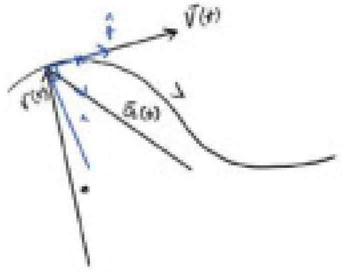
$$\Rightarrow \boxed{\bar{a} = \ddot{S}\hat{t} + \dot{S}^2K\hat{n}}$$ - משוואת התאוצה

$\ddot{S}\hat{t}$ ← תאוצה משיקית

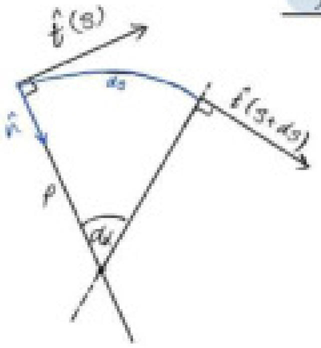
$\dot{S}^2K\hat{n}$ ← תאוצה נורמלית (ניצבת למשיק)

> הקבלה לנהיגה ברכב -
>
> $\ddot{S}$ - כמה אני לוחץ על הגז.
> K - כמה מסובבים את ההגה.
> $\dot{S}$ - המהירות.

$\hat{n} = \dfrac{\bar{a} - \ddot{s}\hat{t}}{\kappa \dot{s}^2}$ – $\hat{n}$ במישור של $\bar{a}$ ושל $\hat{t}$, ולכן גם של $\bar{v}$ <= $\hat{n}$ נמצא במישור האוסקולטורי, בניצב ל-$\hat{t}$.

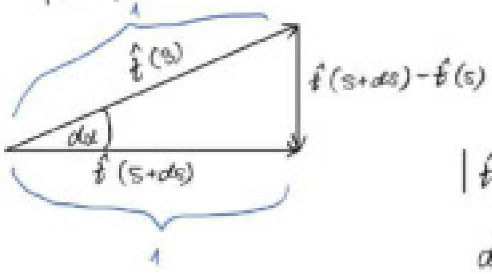


ציור במישור האוסקולטורי



$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim \frac{\hat{t}(s+ds) - \hat{t}(s)}{ds}$$

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \lim \left|\frac{\hat{t}(s+ds) - \hat{t}(s)}{ds}\right|$$



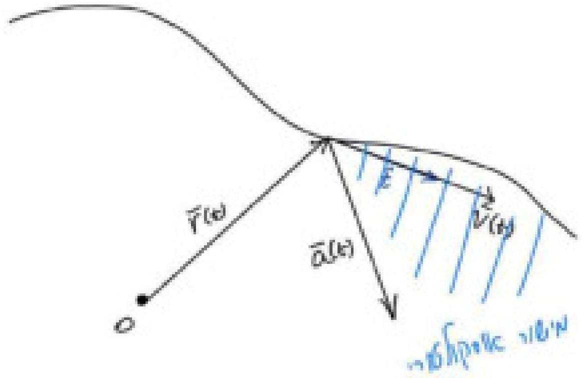
$$\left|\hat{t}(s+ds) - \hat{t}(s)\right| \cong 1 \cdot d\alpha$$

$$ds = \rho\, d\alpha$$

$$\kappa = \lim \frac{d\alpha}{\rho\, d\alpha} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa}$$

מהירות ותאוצה ברכיבי מסלול

חזרה משיעור קודם -



S - פרמטר אורך הקשת.

$S(t)$

$\bar{r}(s)$

$\bar{r}(s(t))$

$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{S}\hat{t}$

וקטור יחידה משיק $\hat{t} = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|}$; $\dot{S} = |\bar{V}|$

$\bar{a} = \ddot{S}\hat{t} + K\dot{S}^2\hat{n} = \ddot{S}\hat{t} + \frac{\dot{S}^2}{\rho}\hat{n}$

עקמומיות - $K = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$, ρ - רדיוס העקמומיות

מסקנה

נראה כיצד נחשב את הגדלים $\dot{S}, \hat{t}, K, \ddot{S}, \hat{n}$ בהינתן $\bar{a}, \bar{V}$.

כלומר, אם מניחים ש- $\bar{V}$ ו- $\bar{a}$ נתונים.

א. $\dot{S} = |\bar{V}|$

ב. $\hat{t} = \hat{V} = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = \frac{\bar{V}}{\dot{S}}$

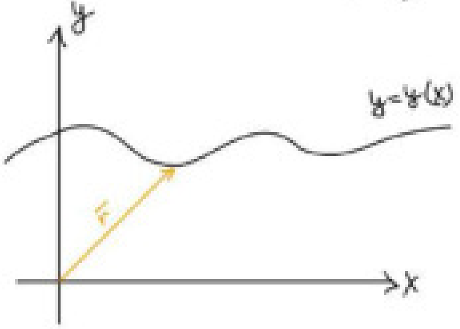
ג. רכיב משיק של התאוצה $a_t = \bar{a}\cdot\hat{t} = \ddot{S}\hat{t}\cdot\hat{t} + K\dot{S}^2\hat{n}\cdot\hat{t} = \ddot{S}$

ד. $K\dot{S}^2\hat{n} = \bar{a} - \ddot{S}\hat{t}$

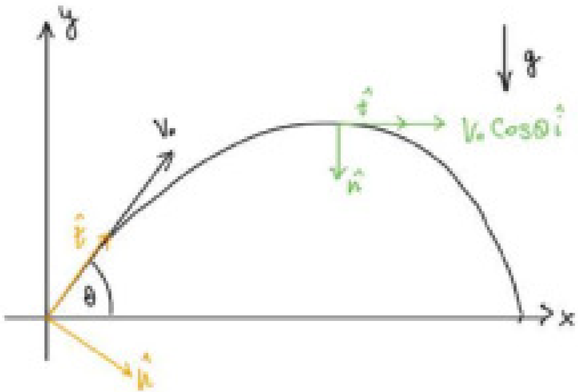
$K\hat{n} = \frac{\bar{a} - \ddot{S}\hat{t}}{\dot{S}^2}$

$\Rightarrow K = \frac{|\bar{a} - \ddot{S}\hat{t}|}{\dot{S}^2}$, $\hat{n} = \frac{\bar{a} - \ddot{S}\hat{t}}{K\cdot\dot{S}^2}$

עבור תנועה לאורך עקומה במישור xy -



$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$



<u>דוגמה-</u>

חלקיק נזרק במישור xy במהירות V_0 (גודל)

בזווית θ מעל ציר x בתנועה בליסטית.

דרוש לחשב: $\dot S, \hat t, \ddot s, K, \hat n$

א. ברגע הזריקה.

ב. בשיא המסלול

א. <u>ברגע הזריקה</u>

$$\bar V = V_0\cos\theta\,\hat i + V_0\sin\theta\,\hat j$$

ט הזמן $\bar a = -g\hat j$

$$\dot S = |\bar V| = V_0 \quad , \quad \hat t = \cos\theta\,\hat i + \sin\theta\,\hat j$$

$$\ddot s = \bar a\cdot\hat t = -g\hat j\cdot(\cos\theta\,\hat i + \sin\theta\,\hat j) = -g\sin\theta$$

$$\bar a - \ddot s\hat t = -g\hat j - (-g\sin\theta)(\cos\theta\,\hat i + \sin\theta\,\hat j) = \ldots$$

$$K = \frac{|\bar a - \ddot s\hat t|}{\dot S^2} \Rightarrow K = \frac{g\cos\theta}{V_0^2}$$

$$\hat n = \frac{\bar a - \ddot s\hat t}{K\cdot\dot S^2}$$

ב. <u>בשיא המסלול</u>

$$\bar a = -g\hat j$$

$$\bar V = V_0\cos\theta\,\hat i$$

$$\dot S = V_0\cos\theta, \quad \hat t = \hat i$$

$$n = -\hat j$$

$$a_n = \bar a\cdot\hat n = K\cdot\dot S^2$$

$$-g\hat j\cdot(-\hat j) = K V_0^2\cos^2\theta$$

$$K = \frac{g}{V_0^2\cos^2\theta}$$

דינמיקה של חלקיק

תנע של חלקיק (תנע קווי)

התנע של חלקיק בעל מסה m ונע במהירות $\bar{v}$ מוגדר להיות $\bar{p} = m\bar{v}$.

תנע זוויתי של חלקיק

התנע הזוויתי של חלקיק בעל מסה m ונע במהירות $\bar{v}$ יחסית לראשית O,

$$\bar{H} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times (m\bar{v})$$ (מומנט התנע)

חוקי התנועה של ניוטון

חוק I: חלקיק נע במהירות קבועה (וקטור מהירות קבוע בגודל וכיוון לאורך קו ישר) אם ורק אם סכום הכוחות עליו מתאפס.

חוק II: $\sum \bar{F} = m\bar{a} = \dot{\bar{p}}$ (סכום הכוחות על החלקיק)

חוק III: אם חלקיק A מפעיל על חלקיק B כוח $\bar{F}$ אזי חלקיק B מפעיל על חלקיק A כוח $-\bar{F}$.

חוקי ניוטון בהתאמה למערכות אינרציאליות

חוק I: קיימות מערכות צירים הנקראות מערכות אינרציאליות בהן חלקיק נע במהירות (וקטור) קבועה אם ורק אם סכום הכוחות עליו מתאפס.

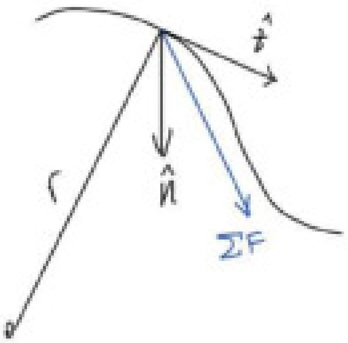
חוק II: במערכת אינרציאלית $\sum \bar{F} = m\bar{a} = \dot{\bar{p}}$

החוק ה-II במערכות שונות

מערכת קרטזית: $\sum F_x = ma_x = m\ddot{x}, \; \sum F_y = ma_y = m\ddot{y}, \; \sum F_z = ma_z = m\ddot{z}$

מערכת פולרית במישור: $\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \; \sum F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

רכיבי מסלול: $\sum F_t = ma_t = m\ddot{s}, \; \sum F_n = ma_n = m\kappa\dot{s}^2$



$$\bar{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\hat{r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\hat{\theta}$$

18.11.2019

דינמיקה של חלקיק

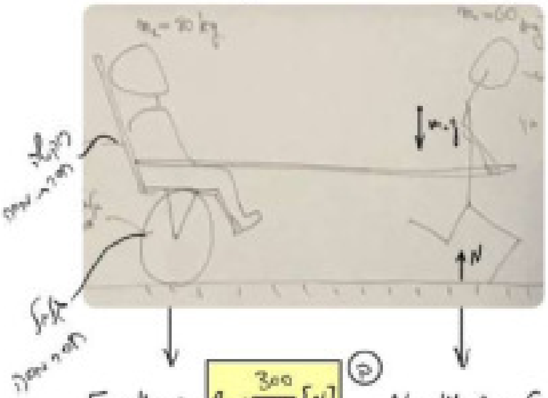
אדם מושך ריקשה. נתון:

מקדמי החיכוך בין הנעליים לכביש - $\mu_s = 0.5$, $\mu_k = 0.4$

א. מה התאוצה המקסימלית שהמושך יכול למשוך את הריקשה?

ב. מהו הכוח שהוא מפעיל על הריקשה במצב כזה?

$m_1 = 80\,[kg]$ $\qquad$ $m_2 = 60\,[kg]$



$$F_2 = m_1 a = 80 \cdot \frac{300}{140}\,[N] \quad \text{(ב)}$$

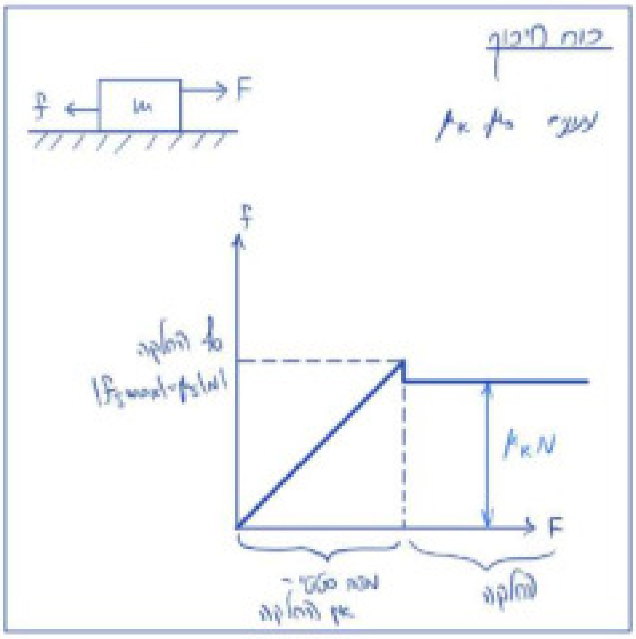
$$N = m_2 g = 600\,[N]$$

$$f_{max} = 300\,[N] = ma$$

$$300 = (80+60)a$$

$$a = \frac{300}{140}\,\left[\frac{m}{s^2}\right] \quad \text{(א)}$$

עבור גוף חסר מסה - $\sum \bar{M} = \bar{0},\ \sum \bar{F} = \bar{0}$ (כמו בסטטיקה)

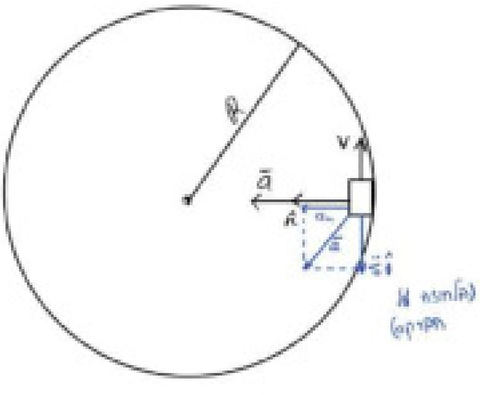


דוגמה נוספת-

מכונית נוסעת במעגל ברדיוס R במהירות בגודל v.

מקדם החיכוך הסטטי בין הגלגלים לכביש הוא μ_s.

מה הגודל המקסימלי של v כדי שלא תהיה החלקה?



מקרה א' - בהנחה ש-v קבועה:

$$\bar{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \quad \Big| \ \rho = R,\ \dot{s} = v$$

אם v קבוע - $\ddot{s} = 0$,

$$\bar{a} = \frac{v^2}{R}\hat{n}$$

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} = \frac{mv^2}{R}\hat{n}$$

סף החלקה -

$$\sum \bar{F} = mg\mu_s \hat{n} = \frac{mv^2}{R}\hat{n}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\mu_s g R}$$

מקרה ב' - הגודל של v אינו קבוע: $\ddot{S} \neq 0$

$$\bar{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{n}$$

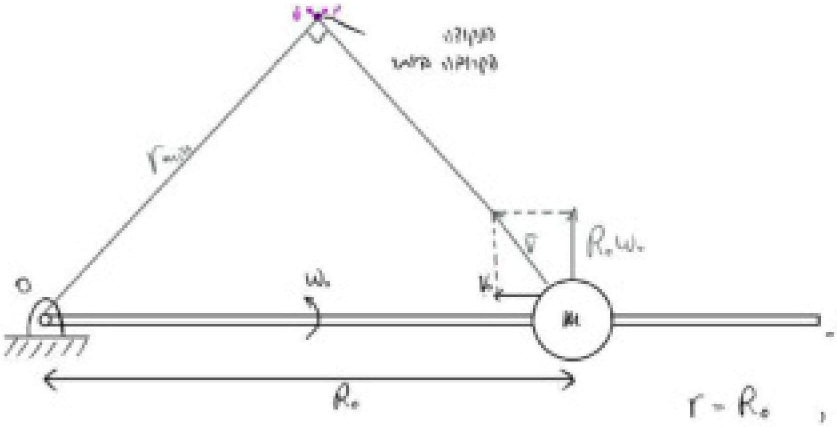
$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$$\mu_s \cdot N = |f_{max}| = m\sqrt{\ddot{S}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$$m^2\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 = (\mu_s \cdot N)^2 - m^2\ddot{S}^2$$

<u>דוגמה נוספת</u> -

- מוט חסר מסה.
- החלקיק חופשי להחליק ללא חיכוך לאורך המוט.
- המוט סובב באופן חופשי ללא חיכוך סביב ציר O.



נתונים במצב ההתחלתי - $r=R_0 \quad , \dot{r}=-V_0 \ , \dot{\theta}=\omega_0$

דרוש: עבור המצב בו החלקיק נמצא הכי קרוב לציר - $r, \theta, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$.

$$\sum \bar{F}=\bar{0} \Rightarrow \bar{a}=\bar{0} \Rightarrow \bar{V}=\text{קבוע}$$

במצב ההתחלתי - $\bar{V}=-V_0\hat{r}+R_0\omega_0\hat{\theta}$

$$r_{min}=R_0\sin\alpha=\boxed{\frac{R_0^2\omega_0}{\sqrt{V_0^2+R_0^2\omega_0^2}}}$$

$$|\bar{V}|=\sqrt{V_0^2+R_0^2\omega_0^2}$$

$$\bar{V}=|\bar{V}|\hat{\theta}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{r}=0}$$

$$\sqrt{V_0^2+R_0^2\omega_0^2}=r_{min}\dot{\theta}_{min} \Rightarrow \dot{\theta}_{min}=\frac{\sqrt{V_0^2+R_0^2\omega_0^2}}{\frac{R_0^2\omega_0}{\sqrt{V_0^2+R_0^2\omega_0^2}}}=\boxed{\frac{V_0^2+R_0^2\omega_0^2}{R_0^2\omega_0}}$$

$$\bar{a}=\bar{0}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

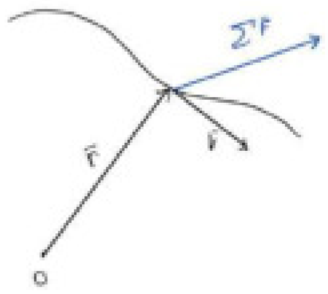
$$\ddot{r}=r\dot{\theta}^2=r_{min}\dot{\theta}_{min}^2$$

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}=0}$$

20.11.2019

משוואות התנע

משוואת התנע הקווי:



תנע קווי - $\bar{P} = m\dot{\bar{r}}$

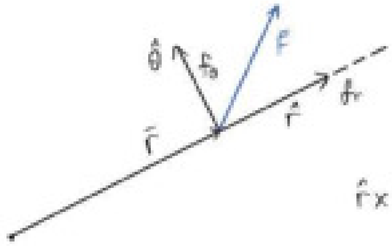
$$\dot{\bar{P}} = m\ddot{\bar{r}} = \sum \bar{F}$$

משוואת התנע הזוויתי:

תנע זוויתי - $\bar{H} = \bar{r} \times (m\dot{\bar{r}}) \Rightarrow \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{r}} \times (m\dot{\bar{r}}) + \bar{r} \times (m\ddot{\bar{r}})$

$$\dot{\bar{H}} = \bar{r} \times (\sum \bar{F}) = \sum \bar{M}$$

משוואת התנע הזוויתי עבור תנועה מישורית שמוצגת בקואורדינטות פולריות



$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$

תזכורת - $\dot{\bar{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\bar{H} = \bar{r} \times (m\dot{\bar{r}}) = m\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\bar{H} = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$

$$\bar{F} = f_r\hat{r} + f_\theta\hat{\theta}$$

$$\bar{M} = r\hat{r} \times \bar{F} = r\hat{r} \times (f_r\hat{r} + f_\theta\hat{\theta})$$

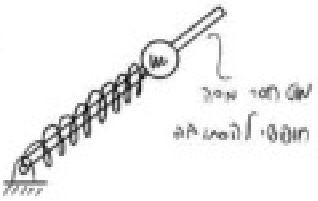
$$\bar{M} = rf_\theta\hat{k}$$

$$\sum \bar{M} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}\hat{k})$$

$$r(\sum f_\theta)\hat{k} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})\hat{k}$$

$$r(\sum f_\theta) = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

$f_r \neq 0$



לדוגמה - אם $\sum f_\theta = 0$

$r^2\dot{\theta} =$ קבוע

דרך אחרת - נשים לב:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = ra_\theta$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = rma_\theta = rf_\theta$$

יחידות ומימדים של מסה וכוח

שיטה הנדסית:

המימד היסודי - כוח

המימד הנגזר - מסה

$$[m]=\frac{[F]}{[a]}$$

שיטה פיזיקלית:

המימד היסודי - מסה

המימד הנגזר - כוח

$$[F]=[m][a]$$

* יחידת המסה במערכת הפיזיקלית היא כמות המסה שמשקלה על פני כדור הארץ היא יחידת הכוח במערכת ההנדסית.

אם לחלקיק יש מסה של 1 Kgm.

א) במערכת יחידות המסה הפיזיקלית משקלו 1 KgF.

ב) $W=mg=1\,Kgm\cdot 9.8\frac{m}{s^2} \Rightarrow W=9.8N$

$$1\,KgF=9.8\,N$$

יחידות מטריות

	מסה	כוח
מערכת הנדסית	$1\,\frac{KgF\cdot s^2}{m}$	$1\,KgF$
מערכת פיזיקלית	$1\,Kgm$	$1\,\frac{Kg\cdot m}{s^2}=1N$

יחידות בריטיות

	מסה	כוח
מערכת הנדסית	$1\,\frac{lbf\cdot s^2}{ft}=1\,Slug$	$1\,lbf$
מערכת פיזיקלית	$1\,lbm$	$1\,\frac{lbm\cdot ft}{s^2}=1\,Poundal$

עבודה ואנרגיה

ההספק של כוח:

ההספק של כוח $\bar F$ הפועל על חלקיק הנע במהירות $\dot{\bar r}$ במערכת לגיון

$$P=\bar F\cdot\bar v=\bar F\cdot\dot{\bar r}\quad\left[\frac{Kg\cdot m}{s^2}\cdot\frac{m}{s}\right]=\left[\frac{Kg\cdot m^2}{s^3}\right]=1\,Watt$$

(Power)

עבודה של כוח:

העבודה שמבצע כוח $\bar F$ הפועל על חלקיק הנע במסלול $\bar r=\bar r(t)$ (המוגדר) בתחום הזמנים מ-t_1 עד t_2 במערכת לגיון

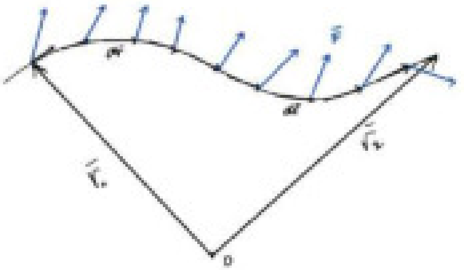
$$W_{12}=\int_{t_1}^{t_2}P\,dt\quad[Watt\cdot s]=\left[kg\cdot\frac{m^2}{s^2}\right]=1\,Joule$$

$$\left(\frac{d}{dt}W=P\right)$$

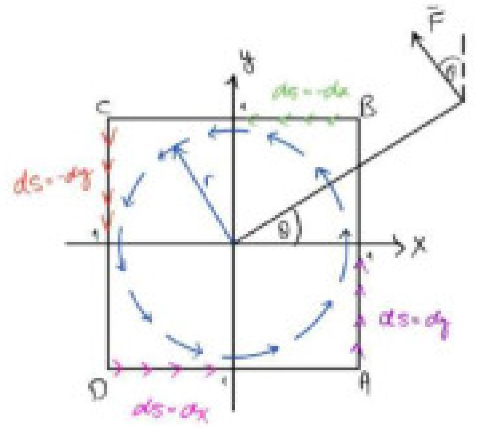
אם הכוח $\bar F$ תלוי רק במיקום ולא בזמן -

$$W_{12}=\int_{t_1}^{t_2}\bar F\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt=\int_{\bar r_1=\bar r(t_1)}^{\bar r_2=\bar r(t_2)}\bar F\cdot d\bar r$$

$$\left(P=\bar F\cdot\dot{\bar r}\;,\;\dot{\bar r}=\frac{d\bar r}{dt}\Rightarrow\int P\,dt=\int\bar F\cdot\frac{d\bar r}{dt}\,dt=\int\bar F\cdot d\bar r\;-\;\text{החלפת המשתנים}\right)$$



במקרה כזה העבודה תלויה בקטע הכוח במיקום ובמסלול אשר מבצע החלקיק.



<u>תרגיל</u> – חשב/ו את עבודת הכוח המעגלי לאורך A→B→C→D→A.

$$\vec{F} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j}$$

$$f_x = -r\sin\theta = -y$$

$$f_y = r\cos\theta = x$$

$$|\vec{F}| = r$$

<u>מעבר מ-A ל-B</u>

$$d\vec{r} = ds\hat{j} = dy\hat{j}$$

$$W_{AB} = \int_A^B (f_x\hat{i} + f_y\hat{j})\cdot(dy\hat{j}) = \int_A^B f_y\,dy = \int_A^B x\,dy = \int_{-1}^{1} 1\cdot dy = y\Big|_{-1}^{1} = 2$$

<u>מעבר מ-B ל-C</u>

$$(ds\cdot(-\hat{i}))$$

$$d\vec{r} = -ds\hat{i} = dx\hat{i}$$

$$W_{BC} = \int_B^C (f_x\hat{i} + f_y\hat{j})\cdot(dx\hat{i}) = \int_B^C f_x\,dx = \int_B^C -y\,dx = -\int_1^{-1} 1\cdot dx = x\Big|_1^{-1} = 2$$

<u>מעבר מ-C ל-D</u>

$$d\vec{r} = ds(-\hat{j}) = dy\hat{j}$$

$$W_{CD} = \int_C^D (f_x\hat{i} + f_y\hat{j})\cdot(dy\hat{j}) = \int_C^D f_y\,dy = \int_C^D x\,dy = \int_1^{-1} -1\cdot dy = -y\Big|_1^{-1} = 2$$

<u>מעבר מ-D ל-A</u>

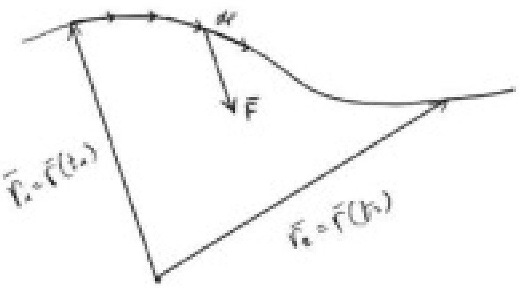
$$d\vec{r} = ds\hat{i} = dx\hat{i}$$

$$W_{DA} = \int_D^A (f_x\hat{i} + f_y\hat{j})\cdot(dx\hat{i}) = \int_D^A f_x\,dx = \int_D^A -y\,dx = \int_{-1}^{1} 1\cdot dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 2+2+2+2 = 8$$

25.11.2019

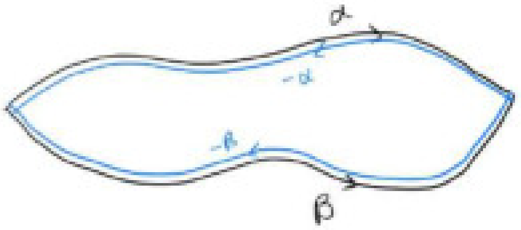
עבודה ואנרגיה



הספק של כוח - $P = \frac{dW}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{V}$

עבודה של כוח - $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$

$W_{\alpha+\beta} = W_\alpha + W_\beta$



$W_\alpha \neq W_\beta$

אם הכוח לא תלוי בזמן - $W_{-\alpha} = -W_\alpha$

עקרון העבודה והאנרגיה הקינטית

אנרגיה קינטית של חלקיק

אנרגיה קינטית של חלקיק בעל מסה m הנע במהירות $\dot{\bar{r}} = \bar{V}$ מהירות החלקיק - $T = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2} m |\bar{V}|^2$

$\left[kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right] = Joule$

נחשב $\frac{dT}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\bar{r}} \dot{\bar{r}}\right) = \frac{1}{2} m \left(\ddot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{r}} \cdot \ddot{\bar{r}}\right)$$

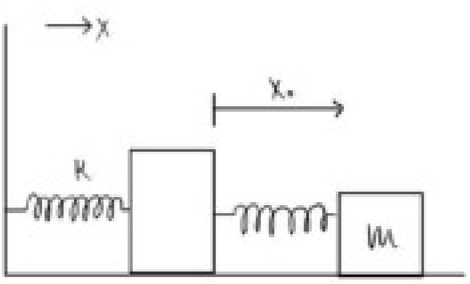
$$\frac{dT}{dt} = (m\ddot{\bar{r}}) \cdot \dot{\bar{r}} = \underbrace{\left(\sum F\right)}_{\bar{F}} \cdot \underbrace{\dot{\bar{r}}}_{\bar{V}} = P_{\Sigma F}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} P_{\Sigma F} \, dt$$

$$T(t_2) - T(t_1) = W_{\Sigma F_{12}} \Rightarrow \boxed{T_2 - T_1 = W_{\Sigma F_{12}}}$$

השינוי באנרגיה הקינטית שווה לעבודה של שקול הכוחות -

דוגמה עם קפיץ -



$$\sum F_x = -kx = m\ddot{x}$$

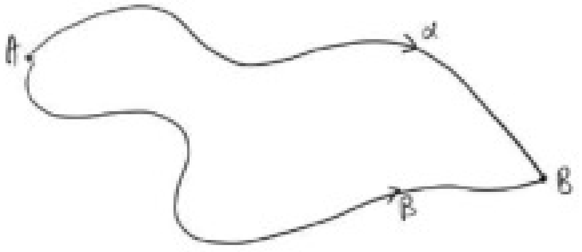
$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{(מתנד)}$$

$$W = \int_{x_0}^{0} -kx \, dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_0}^{0}$$

$$W = \frac{1}{2} k x_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m V_0^2 - 0}_{\text{השינוי באנרגיה הקינטית}}$$

כוחות משמרים

אנחנו אומרים שכוח F שפועל על גוף הוא כוח משמר אם העבודה שהוא מבצע תלויה אך ורק בנקודת ההתחלה והסוף ולא תלויה במסלול.



$$W_\alpha = W_\beta = W_{AB}$$

מסקנה: אם F הוא כוח משמר, העבודה שהוא מבצע במסלול סגור - מתאפסת.

* האנרגיה הפוטנציאלית של כוח משמר

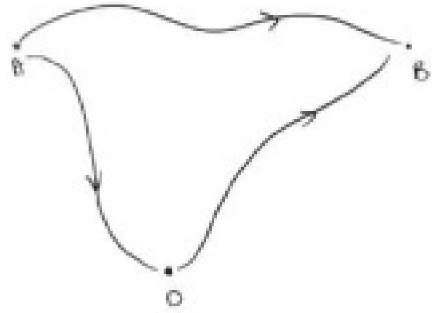
נניח ש-F כוח משמר. נבחר נקודה O במרחב ונקרא לה נקודת "ייחוס".

האנרגיה הפוטנציאלית שיש לחלקיק הנמצא בנקודה A (יחסית ל-O) -

$U(A) = W_{AO}$ - אנרגיה פוטנציאלית

*לא צריך לציין את המסלול כי הכוח משמר.

* חישוב עבודת כוח משמר בעזרת האנרגיה הפוטנציאלית



$$W_{AB} = W_{AO} + W_{OB} = W_{AO} - W_{BO} = U_A - U_B$$

$\int (\bar F_1 + \bar F_2)\cdot d\bar r = \int \bar F_1 \cdot d\bar r + \int \bar F_2 \cdot d\bar r$ - עבודת סכום כוחות שווה לסכום העבודה של הכוחות הבודדים

* עקרון העבודה והאנרגיה הקינטית כאשר פועלים כוחות משמרים

$$\sum \bar F = \sum \bar F_{cons} + \sum \bar F_{non\,c}$$

סכום כוחות משמרים | סכום כוחות שאינם משמרים

$$T_2 - T_1 = W_{12\,cons} + W_{12\,non\,c}$$

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + W_{12\,non\,c}$$

$$\boxed{T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + W_{12\,non\,c}}$$

האנרגיה המכנית הכללית = סכום קינטית + פוטנציאלית

אם כל הכוחות משמרים - $T_2 + U_2 = T_1 + U_1$, והאנרגיה המכנית נשמרת.

* <u>תנאי כוח משמר האנרגיה הפוטנציאלית</u>

נניח שנתונה לנו האנרגיה הפוטנציאלית בכל נקודה $A(x,y,z)$ בה נמצא חלקיק.

$U = U(x,y,z)$

$$dW_{AB} = (f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}) \cdot d\bar{r} \quad (d\bar{r} = dx\hat{i})$$

$$U_A - U_B = f_x dx$$

$$U(x,y,z) - U(x+dx,y,z) = f_x dx$$

$$-\frac{U(x+dx,y,z) - U(x,y,z)}{dx} = f_x \Rightarrow f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\boxed{\bar{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) = -\bar{\nabla} U}$$

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0$$

באופן דומה -

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0$$

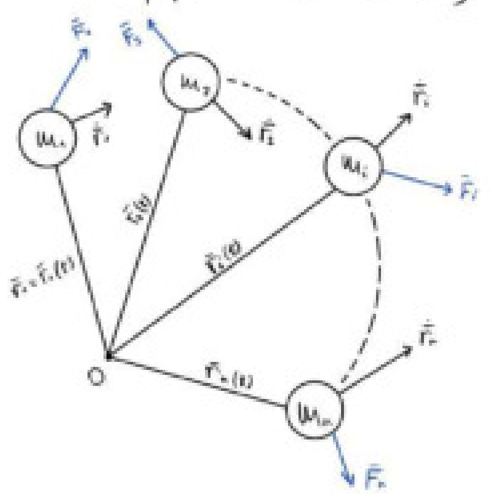
$$\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0$$

ניתן לכתוב זאת גם בצורה הבאה:

$$Curl(\bar{F}) = \bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \bar{0}$$

27.11.2019

דינמיקה של מערכת חלקיקים



n - חלקיקים

m_i - מסה של החלקיק ה-i , $i=1,\dots n$

<u>תנועה:</u>

$\bar{r}_i(t)$ - התנועה של החלקיק ה-i.

$\dot{\bar{r}}_i(t)$ - המהירות של החלקיק ה-i.

$\ddot{\bar{r}}_i(t)$ - התאוצה של החלקיק ה-i.

$\bar{F}_i$ - הכוח השקול על החלקיק ה-i.

החוק ה-II לכל $i=1,\dots n$ $\quad \bar{F}_i = m_i \cdot \ddot{\bar{r}}_i$

הנחות לגבי הכוחות במערכת

<u>הנחה 1:</u>

$$\bar{F}_i = \bar{f}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \bar{f}_{ij}$$

$\bar{f}_i$ - הכוח החיצוני השקול הפועל על החלקיק ה-i.

$\bar{f}_{ij}$ - הכוח שהחלקיק ה-j מפעיל על החלקיק ה-i.

- כוחות פנימיים.

<u>הנחה 2</u>

$$\bar{f}_{ji} = -\bar{f}_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{f}_{ij} + \bar{f}_{ji} = 0$$

הכוחות הפנימיים מתבטלים בזוגות, לכן סכום הכוחות הפנימיים במערכת מתאפס.

$$\sum_i \bar{F}_i = \sum_i \bar{f}_i$$

שקול הכוחות הפועלים על מערכת החלקיקים שווה לשקול הכוחות החיצוניים <u>בלבד</u>.

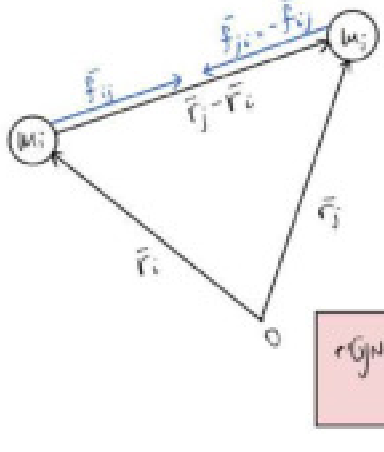
<u>הנחה 3:</u>

$$(\bar{r}_j - \bar{r}_i) \times \bar{f}_{ij} = \bar{0}$$

$$\bar{r}_j \times \bar{f}_{ij} - \bar{r}_i \times \bar{f}_{ij} = 0$$

$$\bar{r}_j \times \bar{f}_{ji} + \bar{r}_i \times \bar{f}_{ij} = 0$$

(המומנט של $\bar{f}_{ji}$; המומנט של $\bar{f}_{ij}$)

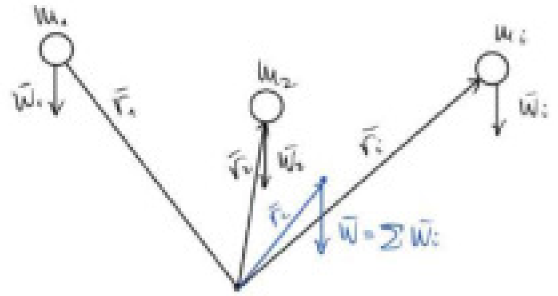


<u>מסקנה:</u> המומנטים של הכוחות הפנימיים מתאפסים בזוגות.

$$\sum \bar{M} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{f}_i$$

שקול המומנטים על המערכת הוא שקול המומנטים של הכוחות החיצוניים בלבד

מרכז המסה



$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}$$

$m = \sum m_i$ – המסה הכללית.

הערה: מרכז המסה מתלכד עם מרכז הכובד.

סכום המומנטים יחסית לנקודה O של המשקלים של החלקיקים השונים במערכת שווה למומנט של המשקל הכולל כאשר הוא מוצב במרכז הכובד.

$$\sum_i \bar{r}_i \times \bar{W}_i = \bar{r}_c \times \bar{W}$$

(1) $m\bar{r}_c = \sum m_i \bar{r}_i$

(2) $m\dot{\bar{r}}_c = \sum m_i \dot{\bar{r}}_i$

(3) $m\ddot{\bar{r}}_c = \sum m_i \ddot{\bar{r}}_i$

התנע הקווי של מערכת חלקיקים

תזכורת: תנע קווי של חלקיק – $\bar{P} = m\dot{\bar{r}}$

התנע הקווי של מערכת חלקיקים מוגדר כדלהלן – (4) $\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i$

בהשוואה של משוואה (2) עם משוואה (4) אנו מסיקים כי – (5) $\bar{P} = m\dot{\bar{r}}_c$

התנע הקווי של המערכת שווה לזה של חלקיק בודד במסה m הנע במהירות של מרכז המסה.

עבור את משוואות (5) בזמן –

$$\dot{P} = m\ddot{\bar{r}}_c \underset{(3)}{=} \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_i \bar{F}_i \underset{\text{הנחה לגבי כוחות}}{=} \sum_i \bar{f}_i$$

משוואת התנע הקווי:

$$\boxed{\dot{\bar{P}} = m\ddot{\bar{r}}_c = \sum_i \bar{f}_i}$$

תנועת מרכז המסה זהה לתנועה של חלקיק שמסתו m (המסה הכללית) ופועל עליו שקול הכוחות החיצוניים.

התנע הזוויתי של מערכת חלקיקים

תזכורת: תנע זוויתי של חלקיק יחסית לראשית O – $\bar{H} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{r} \times (m\dot{\bar{r}})$

התנע הזוויתי של מערכת חלקיקים מוגדר כדלהלן – $\bar{H} = \sum_i \bar{r}_i \times (m_i \dot{\bar{r}}_i)$

$$\dot{\bar{H}} = \sum_i \left(\dot{\bar{r}}_i \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) + \bar{r}_i \times (m_i \ddot{\bar{r}}_i)\right)$$

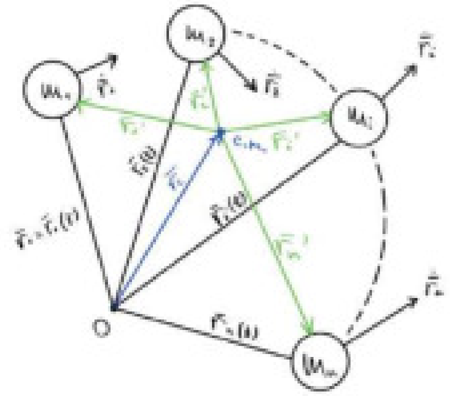
$$\dot{\bar{H}} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i \underset{\text{הנחה 3}}{=} \sum_i \bar{r}_i \times \bar{f}_i$$

משוואת התנע הזוויתי:

$$\boxed{\dot{\bar{H}} = \sum \bar{M} = \sum \bar{r}_i \times \bar{f}_i}$$

הגדלים r צריכים להיות יחסית לראשית של מערכת אינרציאלית.

תנועה כללית: יחסית למרכז המסה



אנחנו מגדירים -

מקום החלקיק יחסית למרכז המסה $\bar{r}_i' = \bar{r}_i - \bar{r}_c \Rightarrow \bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_i'$

מהירות החלקיק יחסית למרכז המסה $\dot{\bar{r}}_i' = \dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_c$

תאוצת החלקיק יחסית למרכז המסה $\ddot{\bar{r}}_i' = \ddot{\bar{r}}_i - \ddot{\bar{r}}_c$

מקום מרכז המסה יחסית למרכז המסה $\bar{r}_c' = \dfrac{\sum_i m_i \bar{r}_i'}{m} = \bar{0}$

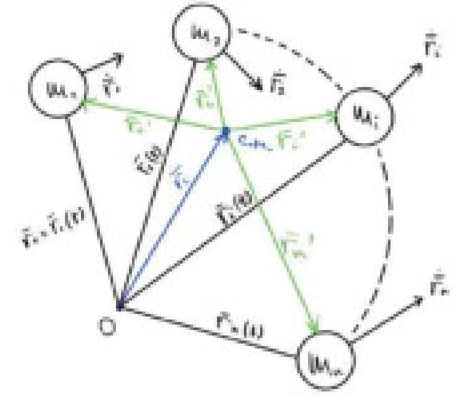
$$m\bar{r}_c' = \sum m_i \bar{r}_i' = \bar{0}$$

$$m\dot{\bar{r}}_c' = \sum m_i \dot{\bar{r}}_i' = \bar{0}$$

$$m\ddot{\bar{r}}_c' = \sum m_i \ddot{\bar{r}}_i' = \bar{0}$$

2.12.2019

מערכת חלקיקים



$$\bar{r}_c := \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}$$

$$m\bar{r}_c = \sum m_i \bar{r}_i$$

תנע קווי $\quad m\dot{\bar{r}}_c = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i =: \bar{p}$

$$m\ddot{\bar{r}}_c = \sum m_i \ddot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{p}} = \sum \bar{F}_i = \sum \bar{f}_i$$

$\Rightarrow \boxed{\sum \bar{f} = m\ddot{\bar{r}}_c}$ – משוואת התנע הקווי

תנע זוויתי $\quad \bar{H} := \sum_i \bar{r}_i \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) \quad (1)$

$\Rightarrow \boxed{\sum \bar{M} = \dot{\bar{H}}}$ – משוואת התנע הזוויתי

(חיצוניים בלבד)

משוואת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_i'$$

$$\bar{r}_i' = \bar{r}_i - \bar{r}_c$$

$\dot{\bar{r}}_i' = \dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_c$ (המהירות יחסית למרכז המסה)

$\ddot{\bar{r}}_i' = \ddot{\bar{r}}_i - \ddot{\bar{r}}_c$ (התאוצה יחסית למרכז המסה)

$\bar{r}_c = \bar{0} \Rightarrow m\bar{r}_c' = \sum m_i \bar{r}_i' = \bar{0} \quad (2)$

$\Rightarrow \sum m_i \dot{\bar{r}}_i' = \bar{0} \quad (3)$

$$\sum m_i \ddot{\bar{r}}_i' = \bar{0}$$

נגדיר תנע זוויתי יחסית למרכז המסה:

(התנע הזוויתי של המערכת יחסית למרכז המסה מוגדר לפי -

$\bar{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i') \quad (4)$

<u>טענה:</u> $\bar{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) \quad (5)$

<u>הוכחה:</u> $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) = \sum \bar{r}_i' \times (m_i (\dot{\bar{r}}_i' + \dot{\bar{r}}_c)) = \sum \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i') + \sum \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_c)$ (האיבר האחרון מסומן 0)

* נשים לב – $\sum \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_c) = (\sum m_i \bar{r}_i') \times \dot{\bar{r}}_c$ (0 לפי משוואה (2)), כאשר $\sum m_i \bar{r}_i' = 0$

$$\Rightarrow \bar{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i)$$

הקשר בין $\bar{H}_c$ ו-$\bar{H}$

$$\bar{H} = \sum_i \bar{r}_i \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i (\bar{r}_c + \bar{r}_i') \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i \bar{r}_c \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) + \sum_i \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) \overset{(5)}{=} \bar{r}_c \times \left(\sum m_i \dot{\bar{r}}_i\right) + \bar{H}_c$$

$$\boxed{\bar{H} = \bar{r}_c \times (m \dot{\bar{r}}_c) + \bar{H}_c}$$

$\bar{H}$ – התנע הזוויתי 'המסלולי'

$m\dot{\bar{r}}_c = \bar{P}$ – התנע הזוויתי של החלקיק שמסתו m ונע במהירות מרכז המסה ≈ "התנע הזוויתי של מרכז המסה"

$\bar{H}_c$ – תנע זוויתי 'הסיבובי' סביב מרכז המסה

טענה: $\sum \bar{M}_c = \sum \bar{r}_i' \times \bar{f}_i = \dot{\bar{H}}_c$ (חיצוני)

הוכחה: נגזור את משוואה (5):

$$\dot{\bar{H}}_c = \sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{r}}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i' \times (m_i \ddot{\bar{r}}_i)$$

*נשים לב -

$$\sum \dot{\bar{r}}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i (\dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_c) \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) - \sum_i \dot{\bar{r}}_c \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) = -\dot{\bar{r}}_c \times \left(\sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i\right)$$

$$= -\dot{\bar{r}}_c \times (m \dot{\bar{r}}_c) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{H}}_c = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i = \sum \bar{r}_i' \times \bar{f}_i$$

פתרון המשוואה הוקטורית $\bar{a} \times \bar{u} = \bar{b}$ (או $\bar{u} \times \bar{a} = \bar{b}$)

עבור שני וקטורים נתונים $\bar{a}, \bar{b}$ נתבונן במשוואה הוקטורית $\bar{u} \times \bar{a} = \bar{b}$ בה $\bar{u}$ - וקטור נעלם.

דוגמה: אם נתון מומנט $\bar{M}$ וכוח $\bar{F}$ שואלים איפה להציב את הכוח, כלומר מהו $\bar{r}$ שעבורו $\bar{M} = \bar{F} \times \bar{r}$!

לכאורה - 3 משוואות עם 3 נעלמים, אבל הפתרון לא תמיד קיים.

כדי שיהיה פתרון $\bar{b}$ צריך להיות ניצב ל-$\bar{a}$ (הוא מקיים את התנאי $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$)

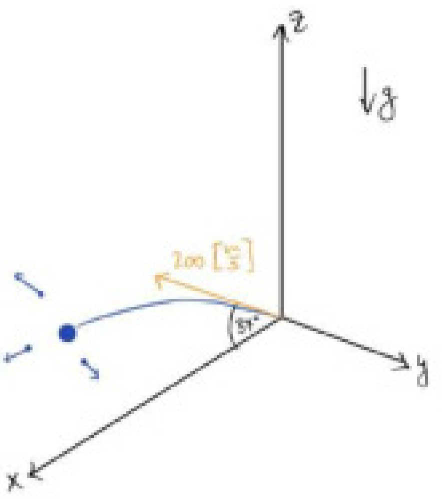
טענה: אין למשוואה $\bar{u} \times \bar{a} = \bar{b}$ פתרון יחיד $\bar{u}_0$.

הוכחה: נניח ש-$\bar{u}_0$ פתרון של המשוואה, כלומר $\bar{u}_0 \times \bar{a} = \bar{b}$. אזי גם $\bar{u} = \bar{u}_0 + \alpha \bar{a}$, α כל מספר, הוא פתרון. בהצבה -

$$\bar{u} \times \bar{a} = (\bar{u}_0 + \alpha \bar{a}) \times \bar{a} = \bar{u}_0 \times \bar{a} = \bar{b}$$

מסקנה - כדי לקבל פתרון יחיד עבור $\bar{u}$ אנו צריכים תנאי נוסף.

מסקנה נוספת - ב-3 המשוואות שמתקבלות רק 2 מהן הן בלתי תלויות.



דוגמה -

קליע משוגר במהירות של 200 m/s בזווית של 37° מעל האופק. תוך כדי מעופו מתפרק הקליע לשלושה חלקים בעלי מסות $m_1 = 40$ kg, $m_2 = 60$ kg, $m_3 = 100$ kg. כעבור 11 שניות נופל החלקיק m_1 בנקודה $\mathbf{r}_1 = 1800\mathbf{i} + 500\mathbf{j}$ (ראה תרשים 5, בו מתוארות גם מערכת הצירים), ומהירותו היתה $\mathbf{v}_1 = 150\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$. באותו זמן נמצא החלקיק m_2 בנקודה $\mathbf{r}_2 = 2000\mathbf{i} + 110\mathbf{j} + 400\mathbf{k}$ ונתון כי היחס בין רכיב ה-y של מהירותו לרכיב ה-z של מהירותו הוא 0.1. דרוש לחשב את מקומו של החלקיק m_3 ואת מהירותם של החלקיקים m_2, m_3 באותו רגע. האם החלקיקים נעו בנפילה חופשית לאחר התפרקות הקליע?

משוואת התנע הקווי: מרכז המסה מתנהג לפי - $\sum \bar{F} = m\ddot{\bar{r}}_c$

כלומר מרכז המסה נע בתנועה של חלקיק עם סך שקול הכוחות החיצוניים.

במקרה שלנו - תנועה בליסטית.

<= לפי נוסחאות קינמטיקה ניתן למצוא את מקום מרכז המסה ומהירותו בזמן $t=11[s]$.

משוואת התנע הזוויתי: $\sum M_c = \dot{H}_c$

הכוחות החיצוניים - כוח הכובד.

$m\bar{r}_c = \sum m_i \bar{r}_i$

בזמן $t=11[s]$ -

$$\bar{r}_c = 1760\hat{i} + 0\hat{j} + 727\hat{k}\ [m] \quad \begin{cases} x_c = (200\cos 37)\cdot 11 \\ y_c = 0 \\ z_c = (200\sin 37)\cdot 11 - \frac{g}{2}\cdot 11^2 \end{cases}$$

$$\bar{V}_c = 160\hat{i} + 12.5\hat{k}\ \left[\frac{m}{s}\right] \quad \begin{cases} V_{cx} = 200\cos 37 \\ V_{cy} = 0 \\ V_{cz} = 200\sin 37 - g\cdot 11 \end{cases}$$

$m\bar{r}_c = m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3 \Rightarrow \bar{r}_3$

$m\bar{V}_c = m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2 + m_3\bar{V}_3 \quad (1)$

3 משוואות סקלריות, 6 נעלמים.

חסרים לנו 3 משוואות נוספות.

<u>שימוש במשוואת התנע הזוויתי</u> -

* שקול המומנטים של כוחות הכובד יחסית למרכז המסה מתאפס לפי הסימון (לרוב אפס)

* שקול המומנטים של כוחות הכובד <u>תמיד</u> מתאפס יחסית למרכז הכובד (=מרכז המסה)

* מסקנה - $\sum \bar{M}_c = \bar{0}$ בכל הזמנים!

<= נוח להשתמש במשוואת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה.

$\sum \bar{M}_c = \bar{0} = \dot{\bar{H}}_c$

$\bar{H}_c$ - וקטור קבוע

$$\bar{H}_c^{+} = \bar{H}_c^{-}$$

אחרי הפיצוץ   לפני הפיצוץ

$$\bar{H}_c = \sum_i \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i') = \sum_i \bar{r}_i' \times (m_i \bar{v}_i)$$

לפני הפיצוץ $\bar{r}_i' = \bar{0}$, לכן $\bar{H}_c^- = \bar{0}$ לפני הפיצוץ.

$\bar{H}_c$ קבוע אומר ש- $\bar{H}_c^+ = \bar{0}$ גם אחרי הפיצוץ.

$$\bar{0} = \bar{r}_1' \times (m_1 \bar{v}_1) + \bar{r}_2' \times (m_2 \bar{v}_2) + \bar{r}_3' \times (m_3 \bar{v}_3) \quad (2)$$

$$\bar{r}_1' = \bar{r}_1 - \bar{r}_c$$

$$\bar{r}_2' = \bar{r}_2 - \bar{r}_c$$

$$\bar{r}_3' = \bar{r}_3 - \bar{r}_c$$

אם נבטא במשוואה (1) את $\bar{v}_1$ בעזרת $\bar{v}_3$, ונציב למשוואה (2) נקבל לאחר העברת אגפים -

$$\underbrace{m_2 (\bar{r}_2' - \bar{r}_1')}_{a} \times \bar{v}_2 = \underbrace{m_3 (\bar{r}_1' - \bar{r}_3') \times \bar{v}_3 - m \bar{r}_1' \times \bar{v}_c}_{b}$$

נשים לב - צורת משוואה מהצורה $\bar{a} \times \bar{u} = \bar{b}$

תנאי לפתרון: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow$ מתקיים (במקרה טוב)

בהנחה שהתנאי מתקיים, יש לנו ∞ פתרונות. זה אומר שבמשוואה (הוקטורית) (2) יש רק 2 משוואות סקלריות בלתי תלויות.

4.12.2019

עבודה ואנרגיה במערכת חלקיקים

אנרגיה קינטית של מערכת חלקיקים

האנרגיה הקינטית של מערכת חלקיקים מוגדרת להיות -

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i |\bar{v}_i|^2$$

נגדיר אנרגיה קינטית של מרכז הכובד -

$$T_c = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}_c \cdot \dot{\bar{r}}_c$$

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{r}_i'$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{r}}_i') \cdot (\dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{r}}_i') = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{r}}_c \cdot \dot{\bar{r}}_c + \frac{1}{2} \cdot 2 \underbrace{\sum m_i \dot{\bar{r}}_i'}_{\sum m_i \dot{\bar{r}}_i' = 0} \cdot \dot{\bar{r}}_c + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{r}}_i' \cdot \dot{\bar{r}}_i'$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}_c \cdot \dot{\bar{r}}_c + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{r}}_i' \cdot \dot{\bar{r}}_i'}$$

אנרגיה קינטית של מרכז המסה | אנרגיה קינטית יחסית למרכז המסה

עקרון העבודה והאנרגיה הקינטית עבור מערכת חלקיקים

עבור כל חלקיק $T_b - T_a = W_{ab}$ (עבודת שקול הכוחות על החלקיק - חיצוניים ופנימיים)

עבור החלקיק ה-i במערכת - $T_{ib} - T_{ia} = (W_{F_i})_{ab}$

נסכם עבור כל החלקיקים - $\sum_i T_{ib} - \sum_i T_{ia} = \sum_i (W_{F_i})_{ab}$

$T_b - T_a = \sum_i (W_{F_i})_{ab}$ - של המערכת.

נראה מדוע עבודת הכוחות הפנימיים לא חייבת להתאפס במקרה הכללי:

לשם כך נראה שההספק של הכוחות הפנימיים בין שני חלקיקים לא חייבים להתאפס.

שני מאסות באופן כללי: $\Rightarrow P = \bar{f}_{ij} \cdot \bar{v}_i + \bar{f}_{ji} \cdot \bar{v}_j = \bar{f}_{ij} \cdot \bar{v}_i - \bar{f}_{ij} \cdot \bar{v}_j$ - סכום ההספקים

מערכת חלקיקים קשיחה

מערכת חלקיקים נקראת קשיחה אם המרחק בין כל זוג חלקיקים לא משתנה בזמן.

$$|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)| = \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot (\bar{r}_j - \bar{r}_i) = \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot (\dot{\bar{r}}_j - \dot{\bar{r}}_i) = 0}$$

המהירות היחסית בין שני חלקיקים בגוף קשיח ניצבת לישר שמחבר אותם

ההספק של הכוחות הפנימיים במערכת קשיחה

עבור כל זוג הרמוני

$$P = \bar{f}_{ij} \cdot \bar{v}_i - \bar{f}_{ij} \cdot \bar{v}_j = \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{v}_i - \bar{v}_j) = 0$$

↓

מקביל ל- $\bar{r}_i - \bar{r}_j$

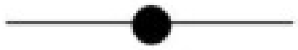
9.12.2019

קינמטיקה של גוף קשיח

מספר דרגות החופש של מערכת מכנית

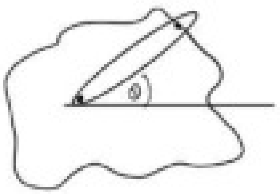
מספר דרגות החופש של מערכת מכנית הוא המספר המינימלי של פרמטרים הדרוש לתיאור מצב עדכני של המערכת.

דוגמאות:

א)  דרגת חופש אחת.

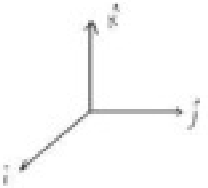
ב) נקודה במרחב - 3 דרגות חופש.

ג) 2 חלקיקים במישור - 4 דרגות חופש.

ד) 

3 דרגות חופש.
גוף קשיח במישור.

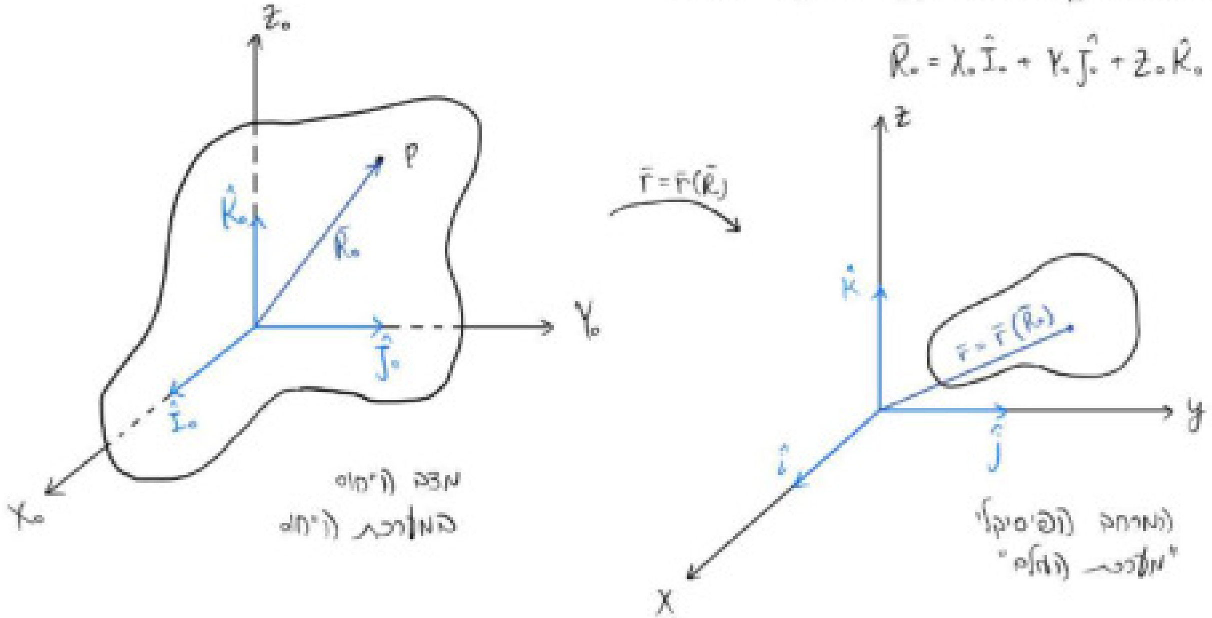
גופים ומצביהם במרחב

המרחב הפיסיקלי בו מתרחשת המכניקה. 

גוף: אוסף של חלקיקים. אנחנו יודעים לצבוע כל אחד ואחד מהחלקיקים.

מצב של גוף במרחב זו פונקציה (שם החלקיק) של מקום במרחב.

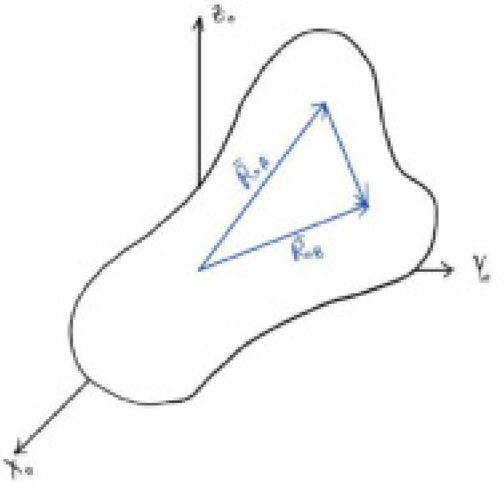
שם החלקיק: $\bar{R}_0 = X_0\hat{I}_0 + Y_0\hat{J}_0 + Z_0\hat{K}_0$

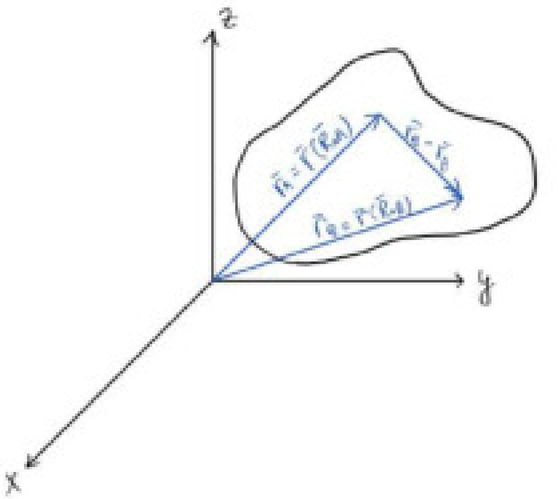


גופים קשיחים

אנו אומרים שגוף הוא גוף קשיח אם עבור כל זוג חלקיקים $\bar{R}_{0A}$ ו- $\bar{R}_{0B}$ מתקיים -

$|\bar{r}_B - \bar{r}_A| = |\bar{r}(\bar{R}_{0B}) - \bar{r}(\bar{R}_{0A})| =$ קבוע ולא תלוי בקונפיגורציה הגוף





בזמן תנועה: $\left|\bar{r}_B(t)-\bar{r}_A(t)\right| =$ קבוע

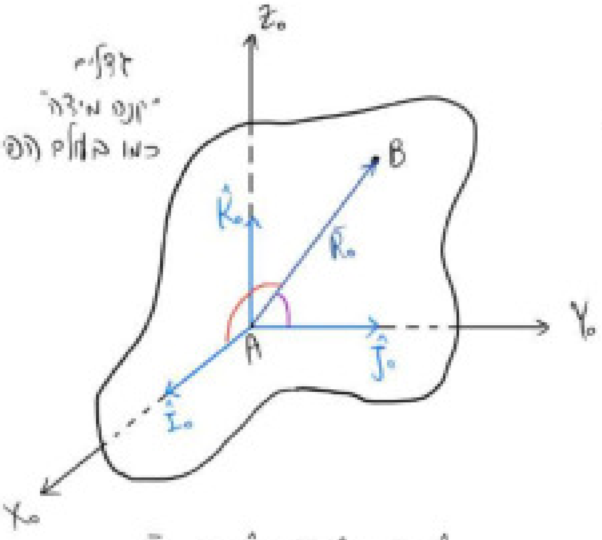
$$\left|\bar{r}_B(t)-\bar{r}_A(t)\right|^2 = (\bar{r}_B-\bar{r}_A)(\bar{r}_B-\bar{r}_A) = \text{קבוע}$$

$$0=\frac{d}{dt}\left|\bar{r}_B(t)-\bar{r}_A(t)\right|^2 = (\dot{\bar{r}}_B-\dot{\bar{r}}_A)(\bar{r}_B-\bar{r}_A)$$

המהירות היחסית $\dot{\bar{r}}_B-\dot{\bar{r}}_A$ ניצבת לישר $\bar{r}_B-\bar{r}_A$ שמחבר את החלקיקים. נכון בגוף קשיח.

- קווים ישרים נשמרים.
- יחסי מרחק נשמרים.
- זוויות נשמרות.

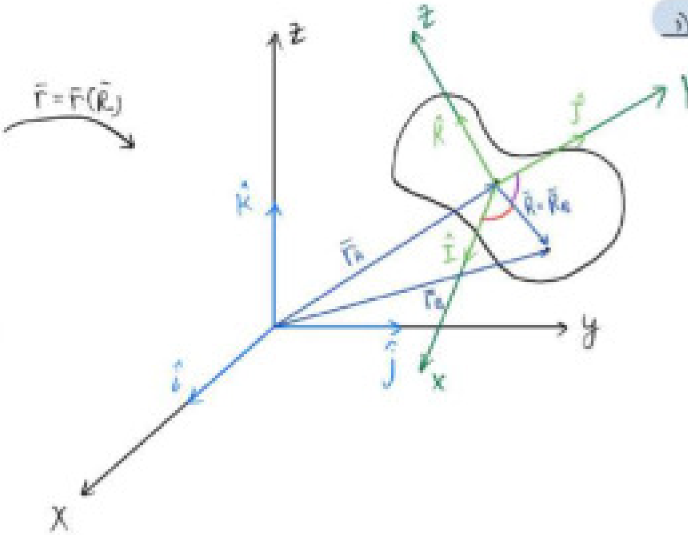
קונפיגורציה



$$\bar{R}_0 = X_0\hat{I}_0 + Y_0\hat{J}_0 + Z_0\hat{K}_0$$

מצב יחוס במערכת הייחוס.

(מיקום הקשיח: כל הנקודות במערכת הייחוס.



מצב מוסים ב"עולם".

$\bar{r}_A$ מקום החלקיק שנמצא בראשית מערכת הייחוס (A)

בקונפיגורציה הנוכחית.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{R} = \bar{r}_A + \bar{R}_B$$

- הווקטורים $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ הם וקטורי יחידה שניצבים זה לזה. $\hat{I}\times\hat{J}=\hat{K}$

- הציור שבוחר את $\bar{R}_0$ ואת $\hat{I}_0,\hat{J}_0,\hat{K}_0$ שלו לציור שבו $\bar{R}$ ואת $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$

רכיב של וקטור הבוחן מסוים לא אותו כמו קוסינוס הכיוון. לכן רכיבי $\bar{R}$ יחסית ל- $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ שווים במתאימה לרכיבי $\bar{R}_0$ יחסית ל- $\hat{I}_0,\hat{J}_0,\hat{K}_0$. כלומר -

$$\bar{R}=X_0\hat{I}+Y_0\hat{J}+Z_0\hat{K}$$

$$\bar{r}=\bar{r}_A+R$$

$$\bar{r}=\bar{r}_A+X_0\hat{I}+Y_0\hat{J}+Z_0\hat{K}$$

$\bar{r}$ – מקום הנקודה בעולם במצב הנוכחי

X_0, Y_0, Z_0 – מאפיינים את הנקודה בגוף

$\bar{r}_A, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ – מאפיינים את הקונפיגורציה של הגוף

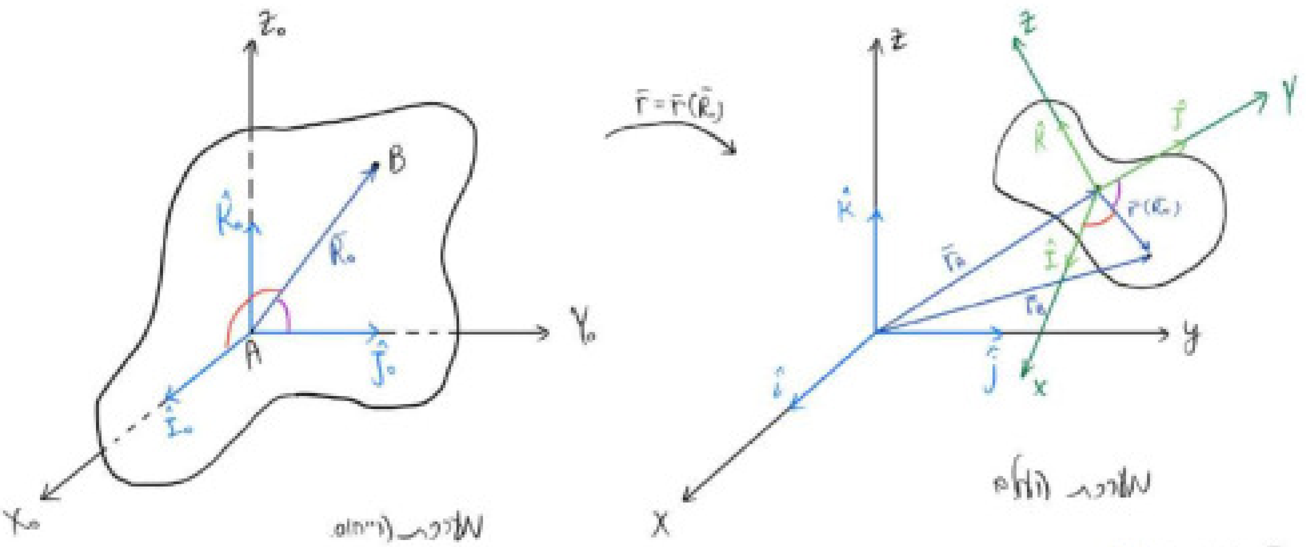
אם נדע את $r_A,\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ נדע את המקום של כל נקודה לא משנה "שמה" (X_0,Y_0,Z_0)

$\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ מתארים את נטיית הגוף במרחב - Orientation. סיבוב = שינוי באוריינטציה של הגוף.

11.12.2019

קינמטיקה של גוף קשיח

תיאור הקונפיגורציה של גוף קשיח במרחב



מערכת הייחוס

מצב הייחוס.

$$\bar{R}_0 = X_0 \hat{I}_0 + Y_0 \hat{J}_0 + Z_0 \hat{K}_0$$ של הנקודה

(1) $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{R}$

(2) $\bar{R} = X_0 \hat{I} + Y_0 \hat{J} + Z_0 \hat{K}$

(3) $\bar{r} = \bar{r}_A + X_0 \hat{I} + Y_0 \hat{J} + Z_0 \hat{K}$

מסקנה: קונפיגורציה (נוכחית) מוגדרת באופן חד משמעי ע"י הוקטורים $\bar{r}_A, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$.

בזמן תנועה - $\bar{r}_A = \bar{r}_A(t), \hat{I} = \hat{I}(t), \hat{J} = \hat{J}(t), \hat{K} = \hat{K}(t)$

$$\bar{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j} + z_A \hat{k}$$

כעת נראה דרך מסודרת למדידת הכיוונים $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$.

מטריצת האוריינטציה ([illegible])

$$(4)\begin{cases} \hat{I} = A_{xX}\hat{i} + A_{yX}\hat{j} + A_{zX}\hat{k} \\ \hat{J} = A_{xY}\hat{i} + A_{yY}\hat{j} + A_{zY}\hat{k} \\ \hat{K} = A_{xZ}\hat{i} + A_{yZ}\hat{j} + A_{zZ}\hat{k} \end{cases}$$

A_{yX}: y ציר בעולם ; $\hat{I}$ של

שים לב: למשל -

$$A_{yX} = \hat{I}\cdot\hat{j} = \cos(\hat{I},\hat{j}) = \cos(X,y)$$

$$A_{zY} = \hat{J}\cdot\hat{k} = \cos(\hat{J},\hat{k}) = \cos(Y,z)$$

לכן ה-A-ים נקראים קוסינוסי הכיוון של הצירים $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$.

$$[A] = \left(\left\{\hat{I}\right\}\left\{\hat{J}\right\}\left\{\hat{K}\right\}\right) = \begin{pmatrix} A_{xX} & A_{xY} & A_{xZ} \\ A_{yX} & A_{yY} & A_{yZ} \\ A_{zX} & A_{zY} & A_{zZ} \end{pmatrix}$$ מטריצת האוריינטציה

השימוש במטריצת הטרנספורמציה

נציב א-(4) ל-(2) -

$$\bar{R} = X_0(A_{xX}\hat{i} + A_{yX}\hat{j} + A_{zX}\hat{k}) + Y_0(A_{xY}\hat{i} + A_{yY}\hat{j} + A_{zY}\hat{k}) + Z_0(A_{xZ}\hat{i} + A_{yZ}\hat{j} + A_{zZ}\hat{k})$$

$$R_x = A_{xX}X_0 + A_{xY}Y_0 + A_{xZ}Z_0$$

$$R_y = A_{yX}X_0 + A_{yY}Y_0 + A_{yZ}Z_0$$

$$R_z = A_{zX}X_0 + A_{zY}Y_0 + A_{zZ}Z_0$$

$$(5)\quad \{R\} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix} = [A]\{\bar{R}_0\} \iff \bar{R} = A(\bar{R}_0)$$

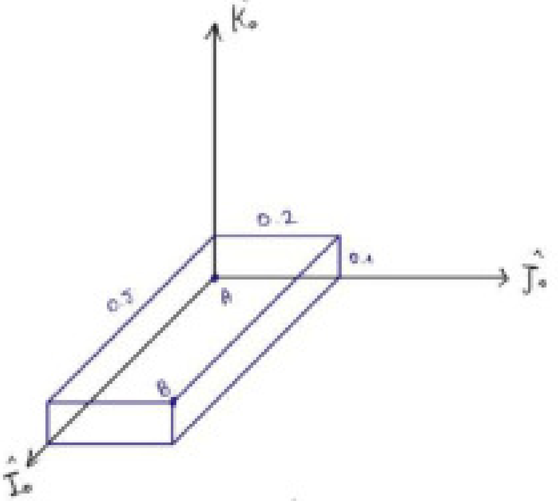
לסיכום: הצבה (5) ל-(1)

$$\bar{r} = \bar{r}_A + A(\bar{R}_0)$$

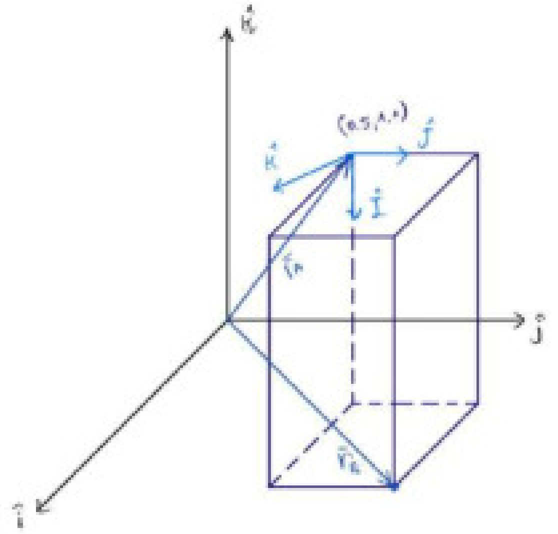
$$\{\bar{r}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{r}\} = \{\bar{r}_A\} + [A]\{\bar{R}_0\}$$

דוגמה



מצב יסוד



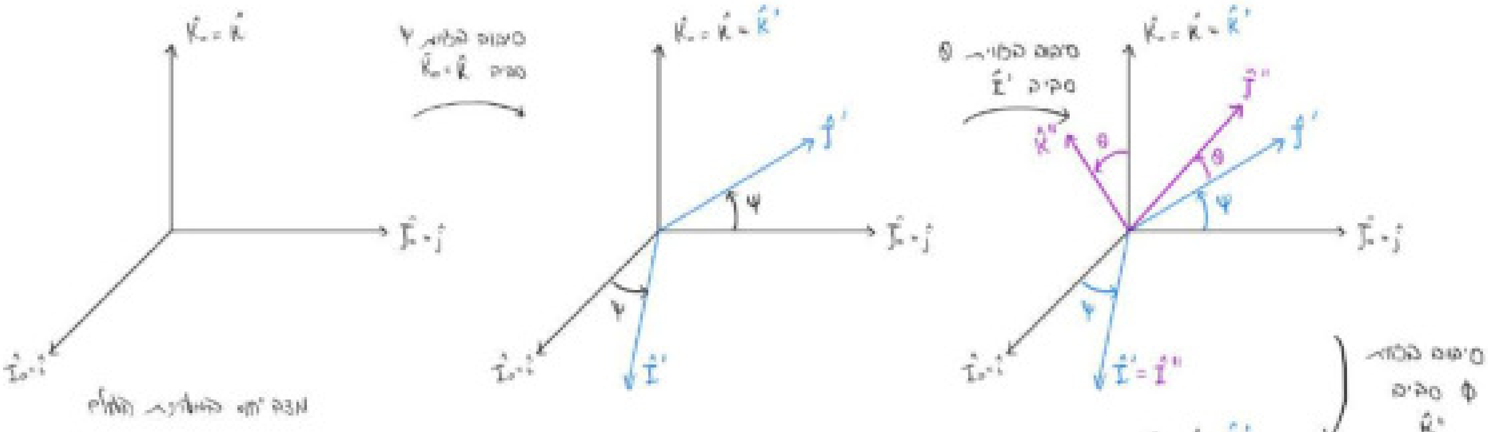
$[A] = ?$

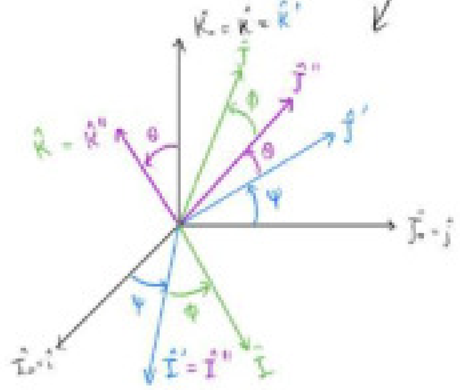
$\bar{r}_B = ?$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{r}_B = 0.6\hat{i} + 1.2\hat{j} + 0.5\hat{k}}$$

זוויות אוילר (Euler Angles)





$$\hat{I}' = \cos\psi\,\hat{i} + \sin\psi\,\hat{j}$$
$$\hat{J}' = -\sin\psi\,\hat{i} + \cos\psi\,\hat{j}$$
$$\hat{K}' = \hat{k}$$

$$\hat{I}'' = \hat{I}'$$
$$\hat{J}'' = \cos\theta\,\hat{J}' + \sin\theta\,\hat{K}'$$
$$\hat{K}'' = -\sin\theta\,\hat{J}' + \cos\theta\,\hat{K}'$$

$$\hat{I} = \cos\phi\,\hat{I}'' + \sin\phi\,\hat{J}''$$
$$\hat{J} = -\sin\phi\,\hat{I}'' + \cos\phi\,\hat{J}''$$
$$\hat{K} = \hat{K}''$$

$$\hat{K} = \hat{K}'' = -\sin\theta\,\hat{J}' + \cos\theta\,\hat{K}' = -\sin\theta(-\sin\psi\,\hat{i} + \cos\psi\,\hat{j}) + \cos\theta\,\hat{k} = \sin\theta\sin\psi\,\hat{i} - \sin\theta\cos\psi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$

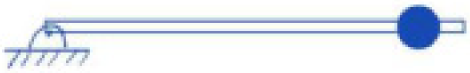
$$\hat{I} = \cos\phi(\cos\psi\,\hat{i} + \sin\psi\,\hat{j}) + \sin\phi(\cos\theta(-\sin\psi\,\hat{i} + \cos\psi\,\hat{j}) + \sin\theta\,\hat{k})$$
$$= (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi)\,\hat{i} + (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi)\,\hat{j} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{J} = -\sin\phi(\cos\psi\,\hat{i} + \sin\psi\,\hat{j}) + \cos\phi(\cos\theta(-\sin\psi\,\hat{i} + \cos\psi\,\hat{j}) + \sin\theta\,\hat{k})$$
$$= (-\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi)\,\hat{i} + (\cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi)\,\hat{j} + \sin\theta\cos\phi\,\hat{k}$$

$$[A] = \begin{Bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{Bmatrix}$$

16.11.2019

<u>הבהרה</u>

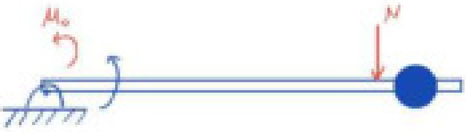


מוט חסר מסה חופשי להסתובב סביב ציר O ללא חיכוך.

⇐ לא פועל על המוט כוח בניצב (N).

* עבור מוט חסר מסה -

$$\sum \bar{F} = \bar{0} \quad , \sum \bar{M} = \bar{0}$$

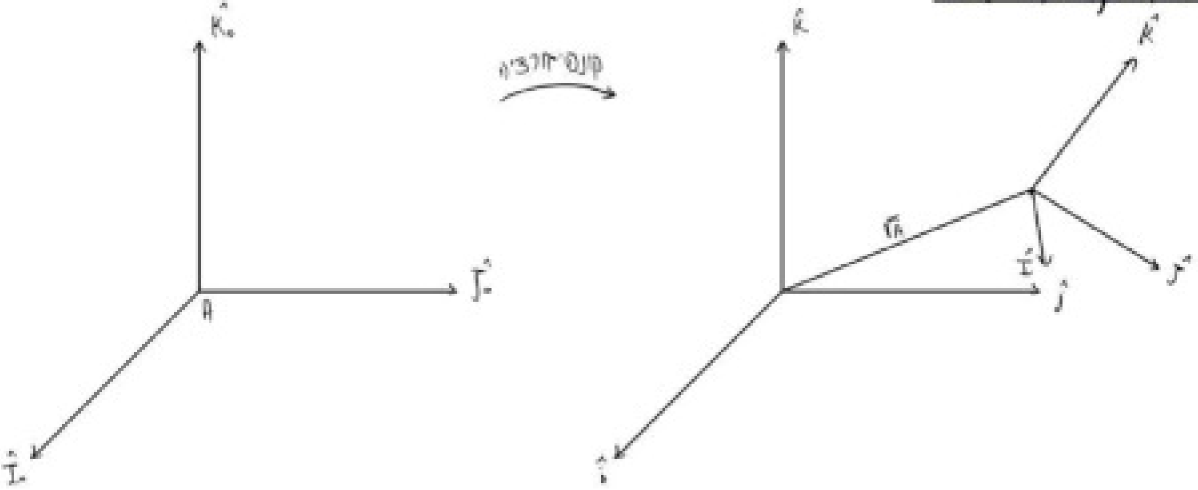


מוט חסר מסה סובב במהירות קבועה $\dot{\theta}=\omega_0$.

$$\sum \bar{F} = m\ddot{\bar{r}}$$

$$\sum \bar{M} = \dot{\bar{H}}$$

תכונות מטריצה אורתוגונלית [A]



$$[A] = \begin{pmatrix} \{\hat{I}\} & \{\hat{J}\} & \{\hat{K}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_xX & A_xY & A_xZ \\ A_yX & A_yY & A_yZ \\ A_zX & A_zY & A_zZ \end{pmatrix}$$

$$A_yX = \cos(\hat{I}, \hat{j})$$

(A_yX: רכיב y של $\hat{I}$)

1. <u>הקשרים בין איברי [A]</u>

$$\hat{I}\cdot\hat{I} = 1 = A_xX^2 + A_yX^2 + A_zX^2$$

$$\hat{J}\cdot\hat{J} = 1 = A_xY^2 + A_yY^2 + A_zY^2$$

$$\hat{K}\cdot\hat{K} = 1 = A_xZ^2 + A_yZ^2 + A_zZ^2$$

$$\hat{I}\cdot\hat{J} = 0 = A_xXA_xY + A_yXA_yY + A_zXA_zY$$

$$\hat{J}\cdot\hat{K} = 0 = A_xYA_xZ + A_yYA_yZ + A_zYA_zZ$$

$$\hat{I}\cdot\hat{K} = 0 = A_xXA_xZ + A_yXA_yZ + A_zXA_zZ$$

6 קשרים ⇐

3 דרגות חופש למסגרת אורתוגונלית (רוטציה)

\+ 3 דרגות חופש למסגרת $\bar{r}_A$

---

6 דרגות חופש לגוף קשיח.

2. את 6 הקשרים הנ"ל ניתן לרשום בצורה מקוצרת באופן הבא:

$$[A]^T[A] = [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. עבור 2 מטריצות $[A]$, $[B]$ -

$$\det([A][B]) = \det[A]\det[B]$$

$$\det[A]^T = \det[A]$$

$$\det[I] = 1$$

$$(\det[A])^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det[A] = \pm 1}$$

4. אנחנו מניחים שמערכת $\hat{I}_0, \hat{J}_0, \hat{K}_0$ ימנית.

$$\det(\{\hat{I}_0\}\{\hat{J}_0\}\{\hat{K}_0\}) = (\hat{I}_0 \times \hat{J}_0)\cdot\hat{K}_0 = 1 \Leftarrow \hat{I}_0 \times \hat{J}_0 = \hat{K}_0$$

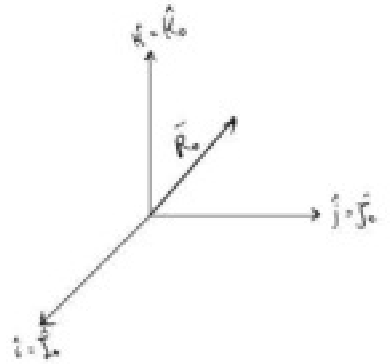
עבור מערכת $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$

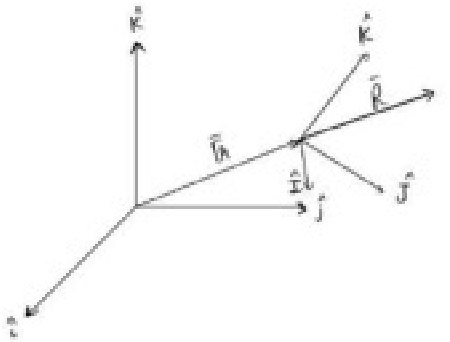
$$\det[A] = \det(\{\hat{I}\}\{\hat{J}\}\{\hat{K}\}) = (\hat{I}\times\hat{J})\cdot\hat{K}$$

→ $+1$ <=> סיבוב

→ -1 <u>שיקוף</u>

5. ציר סיבוב -





התכונות שהזכרנו של המטריצה $[A]$:

⇐ א) תמיד קיים וקטור עצמי במרחב התלת מימדי אוקלידי עם ערך עצמי $+1$.

ב) מלבד מקרים שבהם מוחלפת כמו אי סיבוב בכלל או סיבוב של $180°$, יש רק ציר סיבוב אחד. רק וקטור עצמי אחד בעל ערך עצמי $+1$.

<u>מהירויות בתנועה של גוף קשיח</u>

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{R}$$

$$\bar{R} = X_0\hat{I} + Y_0\hat{J} + Z_0\hat{K}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \underbrace{X_0\hat{I} + Y_0\hat{J} + Z_0\hat{K}}_{\text{מאפיין הקונפיגורציה}}$$

הבזמן תנועה:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}_0(t) + X_0\hat{I}(t) + Y_0\hat{J}(t) + Z_0\hat{K}(t)$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0 + X_0\dot{\hat{I}} + Y_0\dot{\hat{J}} + Z_0\dot{\hat{K}}$$

מהירות זוויתית

טענה: קיים וקטור $\bar{\omega}$ ומקיים -

$$\dot{\hat{I}} = \bar{\omega}\times\hat{I}$$

$$\dot{\hat{J}} = \bar{\omega}\times\hat{J}$$

$$\dot{\hat{K}} = \bar{\omega}\times\hat{K}$$

הוכחה:

א. וקטור $\bar{u}$ עבור כלשהו בבסיס הנתון:

$$\bar{u} = (\bar{u}\cdot\hat{I})\hat{I} + (\bar{u}\cdot\hat{J})\hat{J} + (\bar{u}\cdot\hat{K})\hat{K}$$

ב. נסתכל כאשר עבור הוקטור $\bar{u} = \dot{\hat{I}}$

$$\dot{\hat{I}} = \underbrace{(\dot{\hat{I}}\cdot\hat{I})}_{=0}\hat{I} + (\dot{\hat{I}}\cdot\hat{J})\hat{J} + (\dot{\hat{I}}\cdot\hat{K})\hat{K}$$

נגזרת של וקטור
בעל גודל קבוע.

ג. נשתמש בהגדרות -

$$(1)\ \hat{J} = \hat{K}\times\hat{I}$$

$$(2)\ \hat{K} = \hat{I}\times\hat{J} = -\hat{J}\times\hat{I}$$

$$(3)\ \hat{I}\cdot\hat{K} = 0$$

$$\dot{\hat{I}}\cdot\hat{K} + \hat{I}\cdot\dot{\hat{K}} = 0 \Rightarrow \dot{\hat{I}}\cdot\hat{K} = -\dot{\hat{K}}\cdot\hat{I}$$

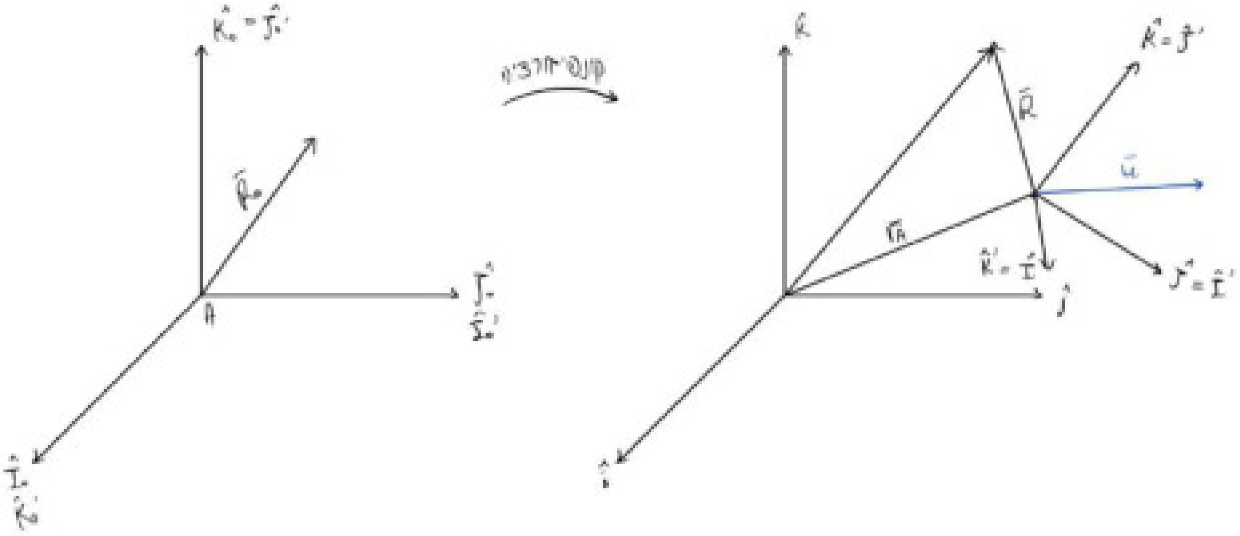
ד. נציב את הנגזרות -

$$\dot{\hat{I}} = (\dot{\hat{I}}\cdot\hat{J})\hat{K}\times\hat{I} - (\dot{\hat{K}}\cdot\hat{I})(-\hat{J}\times\hat{I})$$

$$\dot{\hat{I}} = \left[(\dot{\hat{I}}\cdot\hat{J})\hat{K} + (\dot{\hat{J}}\cdot\hat{K})\hat{I} + (\dot{\hat{K}}\cdot\hat{I})\hat{J}\right]\times\hat{I}$$

נגדיר $\bar{\omega} = (\dot{\hat{I}}\cdot\hat{J})\hat{K} + (\dot{\hat{J}}\cdot\hat{K})\hat{I} + (\dot{\hat{K}}\cdot\hat{I})\hat{J}$ - (המהירות הזוויתית)

$\Leftarrow$ $\dot{\hat{I}} = \bar{\omega}\times\hat{I}$



$$\dot{\hat{J}} = \dot{\hat{I}}' = \bar{\omega}' \times \hat{I}' = \left[(\dot{\hat{I}}' \cdot \hat{J}')\hat{K}' + (\dot{\hat{J}}' \cdot \hat{K}')\hat{I}' + (\dot{\hat{K}}' \cdot \hat{I}')\hat{J}'\right] \times \hat{I}'$$

$$\dot{\hat{J}} = \left[(\dot{\hat{J}} \cdot \hat{K})\hat{I} + (\dot{\hat{K}} \cdot \hat{I})\hat{J} + (\dot{\hat{I}} \cdot \hat{J})\hat{K}\right] \times \hat{J} = \bar{\omega} \times \hat{J}$$

$\dot{\hat{K}} = \bar{\omega} \times \hat{K}$ באופן דומה -

כלל -

$$\dot{\bar{R}} = X_0 \dot{\hat{I}} + Y_0 \dot{\hat{J}} + Z_0 \dot{\hat{K}} = X_0 \bar{\omega} \times \hat{I} + Y_0 \bar{\omega} \times \hat{J} + Z_0 \bar{\omega} \times \hat{K} = \bar{\omega} \times \underbrace{(X_0 \hat{I} + Y_0 \hat{J} + Z_0 \hat{K})}_{\bar{R}}$$

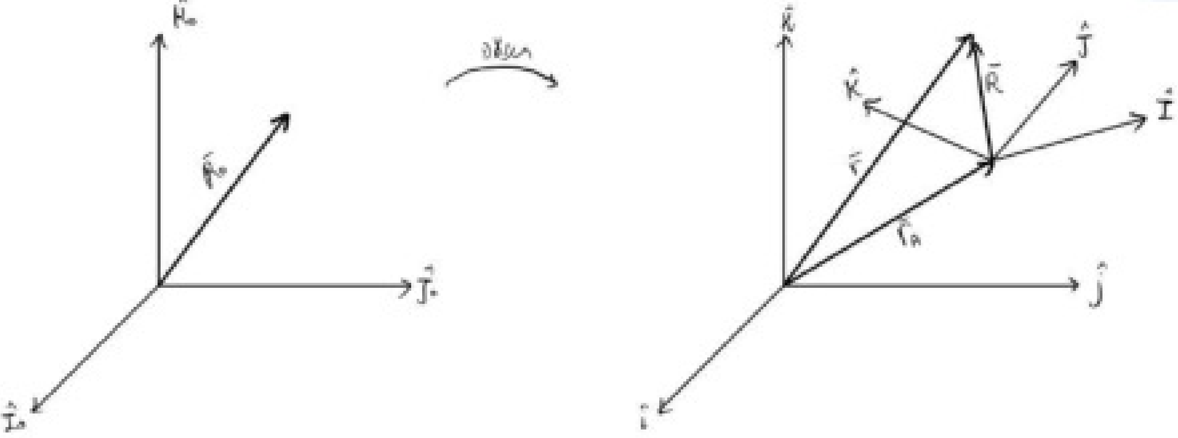
$$\dot{\bar{R}} = \bar{\omega} \times \bar{R}$$

$$\boxed{\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_A + \bar{\omega} \times \bar{R}}$$

18.12.2019

קינמטיקה של גוף קשיח

המהירות הזוויתית



$$\bar{R}_0 = X_0\hat{I}_0 + Y_0\hat{J}_0 + Z_0\hat{K}_0$$

מצב יחוס במערכת הייחוס

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{R} \quad , \bar{R} = X_0\hat{I} + Y_0\hat{J} + Z_0\hat{K}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_A + X_0\hat{I} + Y_0\hat{J} + Z_0\hat{k}$$

תלויים בזמן בתנועה

קיים וקטור $\bar{\omega}$ שמקיים -

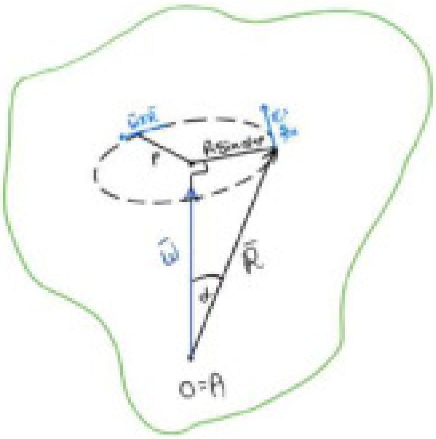
$$\dot{\hat{I}} = \bar{\omega}\times\hat{I}, \quad \dot{\hat{J}} = \bar{\omega}\times\hat{J}, \quad \dot{\hat{K}} = \bar{\omega}\times\hat{K}, \quad \dot{\bar{R}} = \bar{\omega}\times\bar{R}$$

$\bar{\omega}$ - המהירות הזוויתית.

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_A + \bar{\omega}\times\bar{R}$$

מהירות ראשית מערכת הגוף

המשמעות הקינמטית של $\bar{\omega}$



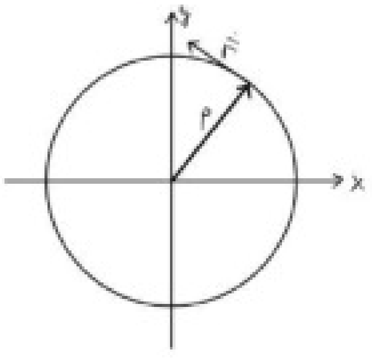
נדון במקרה הפשוט בו $\dot{\bar{r}}_A = \bar{0}$. ראשית מערכת הגוף נייחת.

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} = \bar{\omega}\times\bar{R}$$

נבחר את ראשית מערכת הגוף להיות ב-A

$$|\dot{\bar{r}}| = |\bar{\omega}\times\bar{R}| = |\bar{\omega}||\bar{R}|\cdot\sin\alpha \Rightarrow |\dot{\bar{r}}| = \rho|\bar{\omega}|$$

נשווה זאת לתנועה במעגל בקואורדינטות פולריות ברדיוס קבוע ובקצב שינוי $\dot{\theta}$.



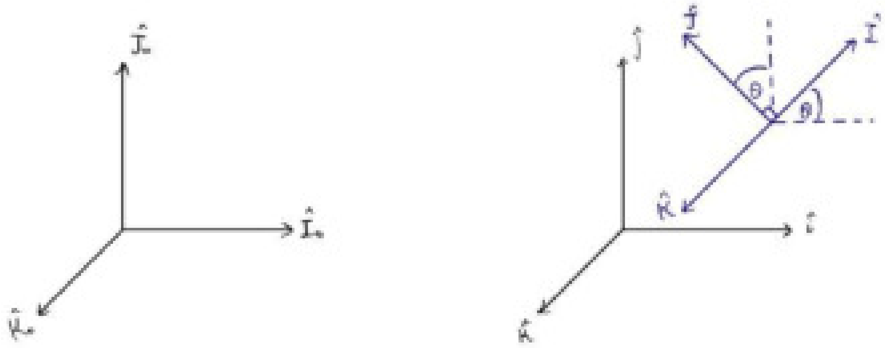
$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \dot{\bar{r}} = \rho\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad |\dot{\bar{r}}| = \rho|\dot{\theta}|$$

($\dot{r} = 0$, $r = \rho$)

מסקנה: מהירות חלקיק בתנועה של הגוף הקשיח שתיארנו היא כמו תנועה במעגל ברדיוס קבוע ρ ובקצב $\dot{\theta} = |\bar{\omega}|$

$$[\bar{\omega}] = \frac{rad}{s}$$

המקרה הדו-מימדי



$\hat{K} = \hat{k}$ תמיד

$$\hat{I} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{J} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

בתנועה - $\theta = \theta(t)$

$$\dot{\hat{I}} = \frac{d\hat{I}}{dt} = \frac{d\hat{I}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\dot{\theta}$$

$$\dot{\hat{J}} = \frac{d\hat{J}}{dt} = \frac{d\hat{J}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})\dot{\theta}$$

$$\dot{\hat{K}} = \bar{0}$$

$$\bar{\omega} = (\dot{\hat{I}}\cdot\hat{J})\cdot\hat{K} + \cancel{(\dot{\hat{J}}\cdot\hat{K})}\cdot\hat{I} + \cancel{(\dot{\hat{K}}\cdot\hat{I})}\cdot\hat{J}$$

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right]\hat{K}$$

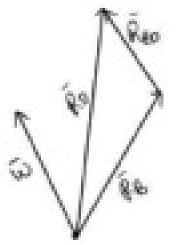
$$\boxed{\bar{\omega} = \dot{\theta}\hat{K}}$$

תכונות הווקטור $\bar{\omega}$

1. ישר שווה מהירות

נניח במקרה בו בגוף יש שתי נקודות B, D עם אותה מהירות. הישר שמחבר את מקומותיהן מקביל לווקטור $\bar{\omega}$.

$$\bar{R}_D - \bar{R}_B = \bar{R}_{BD}$$



$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{\omega}\times\bar{R}_B$$

$$\bar{V}_D = \bar{V}_A + \bar{\omega}\times\bar{R}_D$$

$$\bar{V}_D - \bar{V}_B = \bar{\omega}\times(\bar{R}_D - \bar{R}_B) = \bar{0}$$

<u>מסקנה:</u> כל הנקודות הנמצאות על ישר המקביל ל-ω יש אותה מהירות - ישר שווה מהירות.

<u>נבדוק את הטענה ההפוכה:</u>

נניח ש- $\bar{V}_B = \bar{V}_D$.

$$\cancel{\bar{V}_A} + \bar{\omega}\times\bar{R}_D = \cancel{\bar{V}_A} + \bar{\omega}\times\bar{R}_B$$

$$\bar{\omega}\times(\bar{R}_D - \bar{R}_B) = 0$$

<u>מסקנה:</u> יתכנו שני מצבים $\bar{\omega} = \bar{0}$ או ש- $\bar{R}_{BD}$ מקביל ל-$\bar{\omega}$.

בהנחה ש- $\bar{\omega} \neq \bar{0}$ לשתי נקודות שיש להן אותה מהירות $\Leftarrow$ הישר שמחבר אותן מקביל ל-$\bar{\omega}$.

2. מרכז רגעי וציר רגעי

אנו אומרים שנקודה במרחב היא מרכז רגעי אם (רגעית) מהירותה מתאפסת. C מרכז רגעי אם $\bar{V}_c = \bar{0}$.

עניין $\bar{\omega} \neq \bar{0}$. כל הנקודות הנמצאות על ישר המקביל ל-ω ועובר דרך נקודה C (המרכז הרגעי) הן בעלות מהירות אפס.

כלומר יש לנו ציר רגעי.

איך מוצאים את המרכז הרגעי? ובכלל, האם תמיד קיים? - לא.

הנעלם שלנו בבעיה הוא $\bar{R}_c$. $(\bar{r}_c = \bar{r}_A + \bar{R}_c)$

ומכיוון ש-C מרכז רגעי -

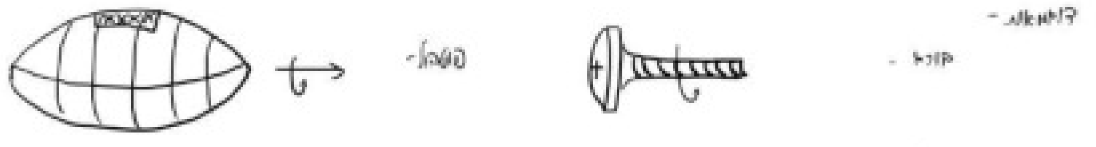
$$\bar{V}_c = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{R}_c = 0$$

$$\bar{\omega} \times \bar{R}_c = -\bar{V}_A$$

משוואה מהצורה - $\bar{a} \times \bar{u} = \bar{b}$

תנאי לפתרון המשוואה: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, ואצלנו $\bar{\omega} \cdot \bar{V}_A = 0$

דוגמאות -



$\bar{V}_A \parallel \bar{\omega}$ ולכן התנאי לא מתקיים, לכן אין בגוף נקודה כזו.

מקרה קיצוני הפוך בו התנאי תמיד מתקיים כי תנועה מישורית. אז במישור התנועה, $\bar{\omega}$ ניצב למישור התנועה.

במקרה הכללי ניתן באופן אנליטי לבנות דומה כבסעיף קודם, לפרק את $\bar{V}_A$ לשני רכיבים:

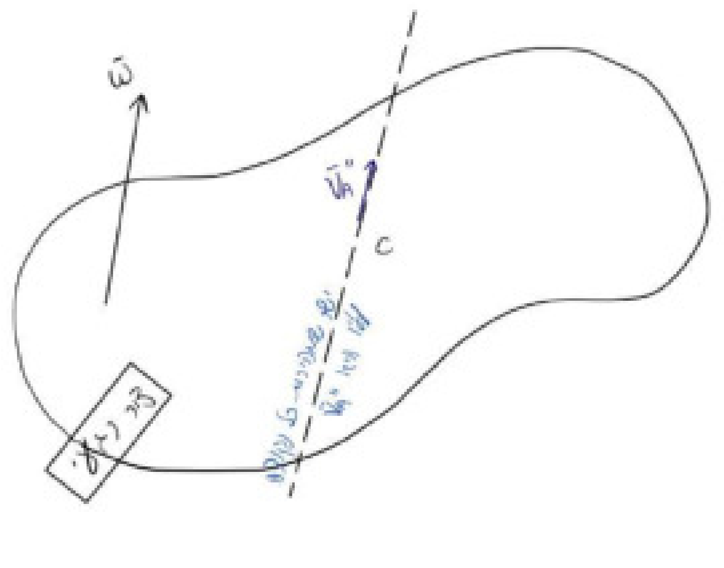
רכיב $\bar{V}_A^{\perp}$ שניצב ל-$\bar{\omega}$ ורכיב $\bar{V}_A^{\parallel}$ שמקביל ל-$\bar{\omega}$.

$$\bar{V}_A = \bar{V}_A^{\parallel} + \bar{V}_A^{\perp}$$

למשוואה $\bar{\omega} \times \bar{R}_c = -\bar{V}_A^{\perp}$ יש תמיד פתרון. למעשה - יש אינסוף פתרונות כפי שראינו.

נבדוק מה המהירות של נקודה C שמקיימת את התנאי הזה:

$$\bar{V}_c = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{R}_c = \bar{V}_A^{\parallel} + \bar{V}_A^{\perp} + (-\bar{V}_A^{\perp}) \Rightarrow \bar{V}_c = \bar{V}_A^{\parallel}$$

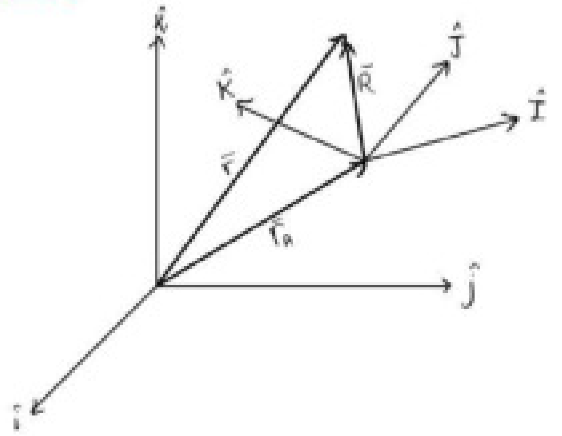


מהירויות בתנועת גוף קשיח

23.12.2019

← ההרצאה הושלמה מההרצאה המצולמת של ראובן, יש דברים שחוזרים על עצמם.

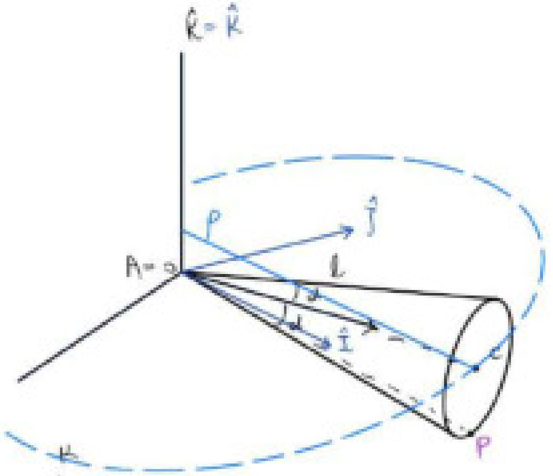
$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_A + \bar{\omega} \times \bar{R}$ $\qquad$ $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{R}$

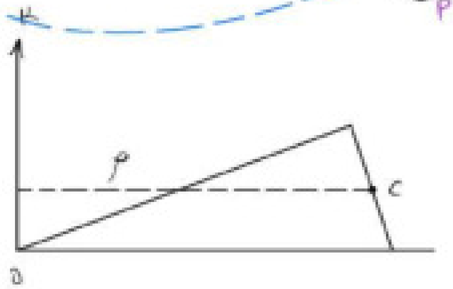


המהירויות של שני נקודות על גוף קשיח שוות אם ורק אם הן נמצאות על ישר שמקביל לוקטור $\bar{\omega}$.

$\bar{r}_D - \bar{r}_C = \bar{R}_D - \bar{R}_C \parallel \bar{\omega}$

דוגמה:





חרוט מתגלגל על מישור אופקי.

נתון כי ציר החרוט OC סובב n פעמים בשנייה

סביב האנך בקצב קבוע עם כיוון השעון.

מכיוון שברגע כזה כל נקודה שנמצאת במגע עם הקרקע

מהירותה מתאפסת, $\bar{\omega}$ חייבת להיות מקבילה ל-OP.

$\bar{\omega} = \omega \hat{I}$

c מבצעת תנועה מעגלית ברדיוס ρ בקצב n סיבובים בשנייה.

בקואורדינטות פולריות - $\dot{\theta} = 2\pi n \left[\frac{rad}{s}\right], r = \rho$.

נחשב את ρ:

$|\bar{OC}| = l\cos\alpha, \ \rho = |\bar{OC}|\cos\alpha = l\cos^2\alpha$

$\bar{V} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = 0 + \rho \cdot 2\pi n \hat{\theta}$

$\bar{V} = l\cos^2\alpha \cdot 2\pi n \hat{\theta}$

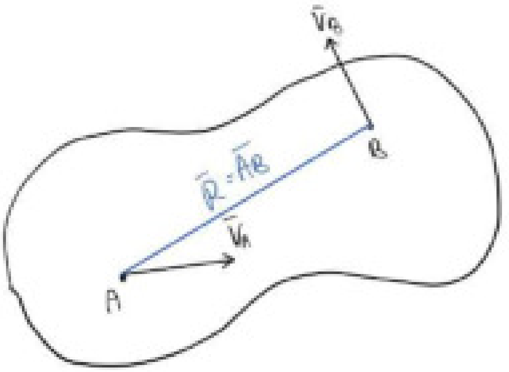
$\bar{V} = l\cos^2\alpha \cdot 2\pi n \hat{J}$

מצד שני:

$\bar{V}_c = \overset{0}{\bar{V}_A} + \bar{\omega} \times \bar{AC}$

$\bar{AC} = \rho\hat{I} + |\bar{OC}|\sin\alpha \hat{k} = l\cos^2\alpha \hat{I} + l\cos\alpha\sin\alpha \hat{k}$

$2\pi n l\cos^2\alpha \hat{J} = \omega\hat{I} \times (l\cos^2\alpha \hat{I} + l\cos\alpha\sin\alpha \hat{k}) = -\omega l\cos\alpha\sin\alpha \hat{J} \Rightarrow \boxed{\bar{\omega} = -2\pi n \operatorname{ctg}\alpha \hat{I}}$



המהירות הזוויתית של גוף עבור נתוני המהירויות של שתי נקודות

נניח שנתונות המהירויות של שתי נקודות בגוף קשיח $\bar V_A, \bar V_B$.

האם הנתונים יקבעו לנו את $\bar\omega$?

$$\overset{\checkmark}{\bar V_B} = \overset{\checkmark}{\bar V_A} + \overset{?}{\bar\omega} \times \overset{\checkmark}{\bar R}$$

מקבלים משוואה - $\bar\omega \times \bar R = \bar V_B - \bar V_A$

מהצורה $\bar u \times \bar a = \bar b$.

1. תנאי לקיום פתרון - $(\bar V_B - \bar V_A) \cdot \bar R = 0$

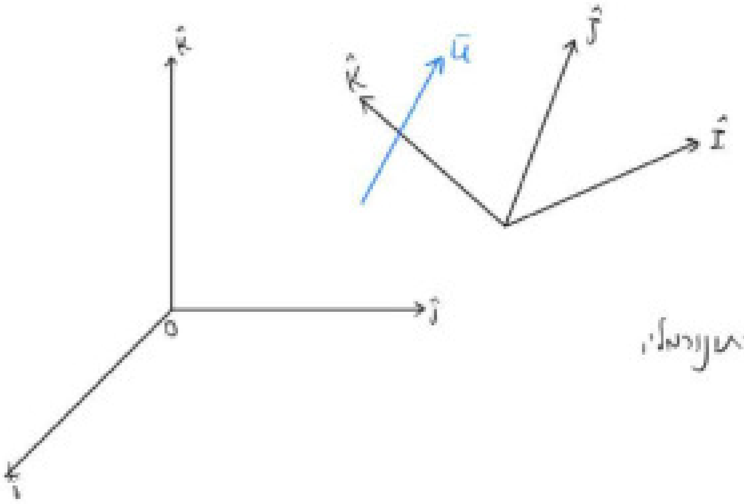
(תנאי חייב להתקיים, זאת מכיון שלא נתון לא את המהירויות (נתון מספר אחד), ניתן למצוא את מתוך התנאי.)

2. למשוואה $\bar u \times \bar a = \bar b$ אין פתרון יחיד. במקרה שלנו, אם נוסיף ל-$\bar\omega$ וקטור בכיוון $\bar R$ המשוואה לא משתנה.

$$(\bar\omega + a\bar R) \times \bar R = \bar\omega \times \bar R = \bar V_B - \bar V_A$$

מסקנה: אי אפשר לקבוע את $\bar\omega$ באופן חד משמעי מהנתונים (אלא אם כן יש אינפורמציה נוספת).

הנגזרת של וקטור שנתון ע"י רכיבים במערכת נעה



נניח וקטור $\bar u$ התלוי בזמן.

ניתן לרשום כמובן

$$\bar u(t) = u_x(t)\hat i + u_y(t)\hat j + u_z(t)\hat k$$

מכיון שבכל זמן t, $\hat I(t), \hat J(t), \hat K(t)$ מהווים בסיס אורתונורמלי,

ניתן לרשום -

$$\bar u(t) = u_X(t)\hat I(t) + u_Y(t)\hat J(t) + u_Z(t)\hat K(t)$$

נגזור את המשוואה -

$$\dot{\bar u} = \dot u_X \hat I + u_X \dot{\hat I} + \dot u_Y \hat J + u_Y \dot{\hat J} + \dot u_Z \hat K + u_Z \dot{\hat K}$$

בהרצאות הוכחנו כי - $\dot{\hat I} = \bar\omega \times \hat I,\ \dot{\hat J} = \bar\omega \times \hat J,\ \dot{\hat K} = \bar\omega \times \hat K$

$$\dot{\bar u} = \dot u_X \hat I + u_X \bar\omega \times \hat I + \dot u_Y \hat J + u_Y \bar\omega \times \hat J + \dot u_Z \hat K + u_Z \bar\omega \times \hat K$$

$$\dot{\bar u} = \dot u_X \hat I + \dot u_Y \hat J + \dot u_Z \hat K + \bar\omega \times (u_X \hat I + u_Y \hat J + u_Z \hat K)$$

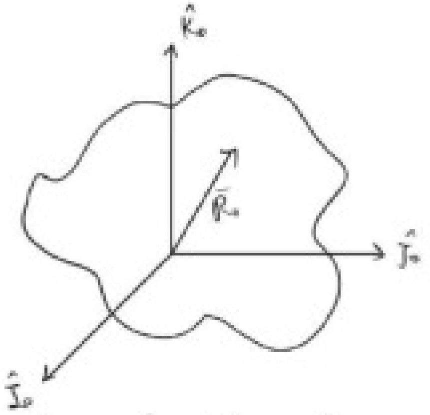
נסמן - $\dot{\bar u}_{XYZ} = \dot u_X \hat I + \dot u_Y \hat J + \dot u_Z \hat K$

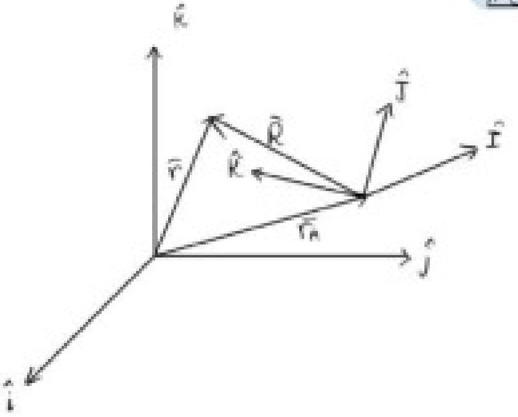
הנגזרת בזמן של הוקטור $\bar u$ יחסית למערכת $\hat I, \hat J, \hat K$.

התרומה של סיבוב המערכת

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\bar u} = \dot{\bar u}_{XYZ} + \bar\omega \times \bar u}$$

המהירות של חלקיק שנע יחסית לגוף קשיח





$\bar R_0 = X_0\hat I_0 + Y_0\hat J_0 + Z_0\hat K_0$

כאשר חלקיק נע יחסית לגוף - $X_0 = X_0(t),\ Y_0 = Y_0(t),\ Z_0 = Z_0(t)$ - תלויים בזמן.

$\bar R(t) = X_0(t)\hat I(t) + Y_0(t)\hat J(t) + Z_0(t)\hat K(t)$

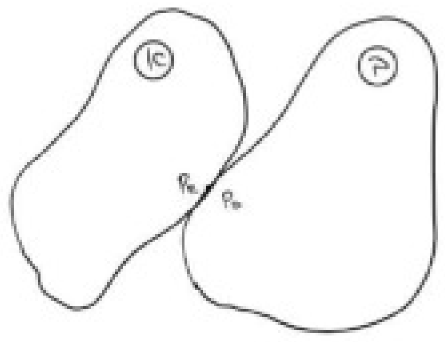
$$\dot{\bar R} = \dot{\bar R}_{XYZ} + \bar\omega\times\bar R \quad , \dot{\bar R}_{XYZ} = \dot X_0\hat I + \dot Y_0\hat J + \dot Z_0\hat K$$ — המהירות של החלקיק יחסית למערכת הגוף

$\bar r = \bar r_A + \bar R \Rightarrow \dot{\bar r} = \dot{\bar r}_A + \dot{\bar R}$

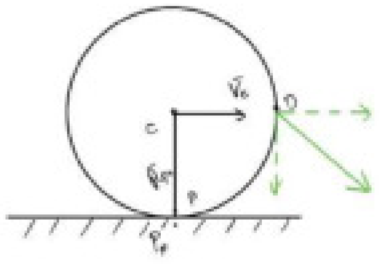
$$\dot{\bar r} = \dot{\bar r}_A + \dot{\bar R}_{XYZ} + \bar\omega\times\bar R$$

מהירות הגרירה

גלגול



אנו אומרים שהגופים (k) ו-(p) מתגלגלים זה על זה אם כל אחת מהנקודות P_k ו-P_p שנמצאות במגע הן בעלות מהירות זהה. $\bar V_{P_k} = \bar V_{P_p}$



המהירות של נקודה P מתאפסת. $\bar V_p = \bar 0$

נניח שנתונה $\bar V_c = V_c\hat i$

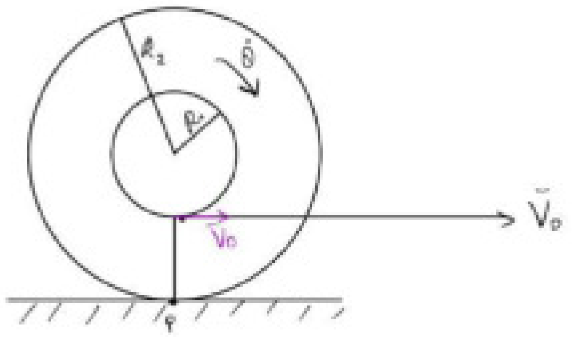
$$\bar V_c = V_p + \dot\theta\hat k\times\bar R_{pc}$$

$$V_c\hat i = \bar 0 + \dot\theta\hat k\times(R\hat j) = -R\dot\theta\hat i \Rightarrow \dot\theta = -\frac{V_c}{R}$$

$\bar R_{PD} = R\hat i + R\hat j$

$\bar V_D = \bar V_p + \dot\theta\hat k\times(R\hat i + R\hat j)$

$\bar V_D = -\frac{V_c}{R}\hat k\times(R\hat i + R\hat j) \Rightarrow \bar V_D = -V_c\hat j + V_c\hat i$



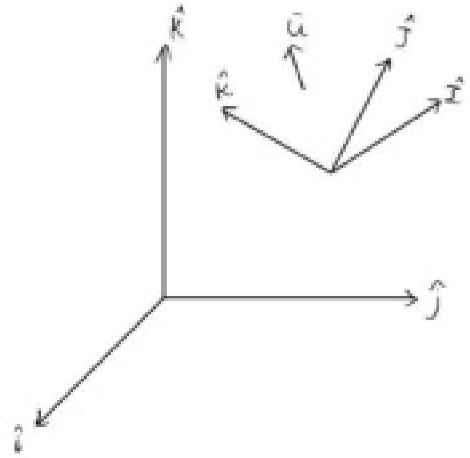
$$\bar{V}_O = V_O\,\hat{i} = \bar{V}_P + \dot{\theta}\,\hat{k} \times (R_2 - R_1)\,\hat{j} = -\dot{\theta}\,(R_2 - R_1)\,\hat{i}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{V_0}{R_2 - R_1} < 0$$

25.12.2019

תזכורת:

נגזרת של וקטור הנתון באמצעות רכיביו במערכת המצומדת לגוף



וקטור כלשהו - $\bar u = u_x \hat i + u_y \hat j + u_z \hat k$

$$\dot{\bar u} = \dot u_x \hat i + \dot u_y \hat j + \dot u_z \hat k$$

$$\bar u = u_x \hat I + u_y \hat J + u_z \hat K$$

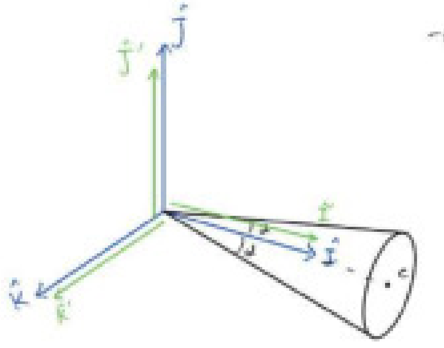
$\hat I, \hat J, \hat K$ תלויים בזמן

$$\dot{\hat I} = \bar\omega \times \hat I,\quad \dot{\hat J} = \bar\omega \times \hat J,\quad \dot{\hat K} = \bar\omega \times \hat K$$

$$\dot{\bar u} = \dot{\bar u}_{xyz} + \bar\omega \times \bar u$$

$\hat I, \hat J, \hat K$ - הנגזרת היחסית ל- $\dot{\bar u}_{xyz} = \dot u_x \hat I + \dot u_y \hat J + \dot u_z \hat K$

דוגמה שראינו -



$\bar\omega = -2\pi n \cot\alpha \hat I$ <u>קבוע</u> (המערכת כו - נכון לכל t)

$\hat I', \hat J', \hat K'$ מתלכדת כרגע עם $\hat I, \hat J, \hat K$.

- היא לא צמודה לגוף.
- סובבת ב- $\bar\Omega = 2\pi n \hat J' = 2\pi n \hat j$ - מהירות הזווית יחסית לגוף.

נגזרת של וקטור הנתון באמצעות רכיביו במערכת סובבת כלשהי

אנחנו דנים במערכת $\hat I', \hat J', \hat K'$ (X', Y', Z') שסובבת במהירות זוויתית $\bar\Omega$ יחסית ל- $\hat i, \hat j, \hat k$.

נניח שהווקטור $\bar u$ נתון באמצעות רכיביו יחסית למערכת זו $\bar u = u_{x'} \hat I' + u_{y'} \hat J' + u_{z'} \hat K'$.

אנו מחפשים את $\dot{\bar u}$.

אם אנו מתייחסים (באופן דמיוני) למערכת זו כמערכת שצמודה אל הגוף, אזי ניתן לכתוב מיד

$$\dot{\hat I}' = \bar\Omega \times \hat I',\quad \dot{\hat J}' = \bar\Omega \times \hat J',\quad \dot{\hat K}' = \bar\Omega \times \hat K'$$

$$\dot{\bar u} = \dot{\bar u}_{x'y'z'} + \bar\Omega \times \bar u$$

$$\dot{\bar u}_{x'y'z'} = \dot u_{x'} \hat I' + \dot u_{y'} \hat J' + \dot u_{z'} \hat K'$$

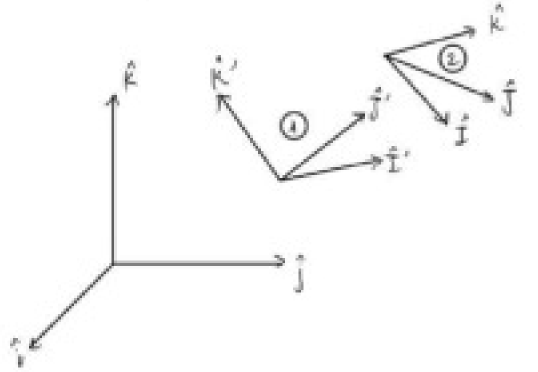
נחזור לדוגמה (המחט). הווקטור בו אנו דנים הוא הווקטור $\bar{\omega}$ (אותו אנו רוצים לגזור בזמן), והוא נתון ע"י $\bar{\omega} = -2\pi n \, ctg\alpha \, \hat{I}'$

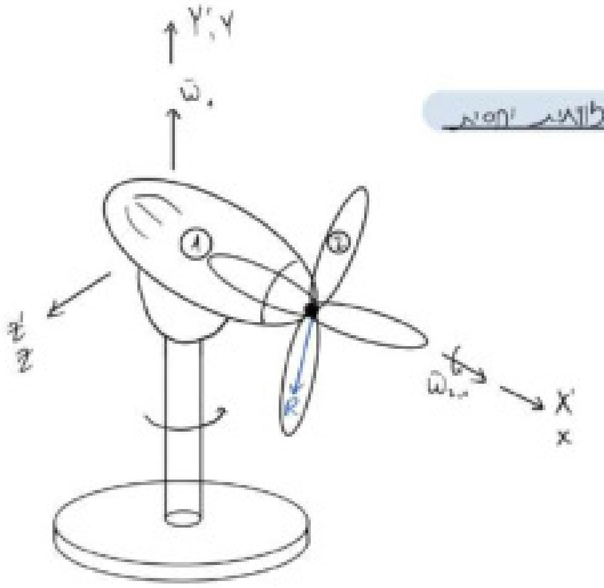
$$\dot{\bar{\omega}}_{X'Y'Z'} = \bar{0}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \cancel{\dot{\bar{\omega}}_{X'Y'Z'}}^{\,0} + \bar{\Omega} \times \bar{\omega} = 2\pi n \hat{J}' \times (-2\pi n \, ctg\alpha \, \hat{I}')$$

$$\dot{\bar{\omega}} = 4\pi^2 n^2 \, ctg\alpha \, \hat{K}'$$

תנועה לגופים יחסית





$\hat{I}',\hat{J}',\hat{K}'$ מסתובבת ב- $\bar{\omega}_0$ יחסית ל- $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$.

$\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ מסתובבת ב- $\bar{\omega}_{2,1}$ יחסית ל- $\hat{I}',\hat{J}',\hat{K}'$.

אנו רוצים לגזור מה המהירות הזוויתית של $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ יחסית ל- $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$. נסמן אותה ע"י $\bar{\omega}_{2,0} = \bar{\omega}_2$.

נגזור בווקטור $\bar{R} = R_X \hat{I} + R_Y \hat{J} + R_Z \hat{K}$ שרכיביו R_X, R_Y, R_Z קבועים יחסית ל- $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$.

- וקטור "קבוע" יחסית לגוף 2.

נתחיל לגזור מהמערכת של- X',Y',Z' מסתובבת (ב- $\bar{\omega}_0$) ונחשב את $\dot{\bar{R}}_{X'Y'Z'}$.

$$\dot{\bar{R}}_{X'Y'Z'} = \dot{\bar{R}}_{XYZ} + \bar{\omega}_{2,1} \times \bar{R}$$

$$\dot{\bar{R}}_{X'Y'Z'} = \bar{\omega}_{2,1} \times \bar{R}$$

$$\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{u}}_{XYZ} + \bar{\omega} \times \bar{u}$$

$$\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{u}}_{X'Y'Z'} + \bar{\Omega} \times \bar{u}$$

נעשה בשלב שני מעבר מ- X',Y',Z' ל- X,Y,Z.

$$\dot{\bar{R}} = \dot{\bar{R}}_{X'Y'Z'} + \bar{\omega}_0 \times \bar{R}$$

$$\dot{\bar{R}} = \bar{\omega}_{2,1} \times \bar{R} + \bar{\omega}_0 \times \bar{R}$$

$$\dot{\bar{R}} = (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{2,1}) \times \bar{R}$$

מצד שני -

$$\dot{\bar{R}} = \cancel{\dot{\bar{R}}_{XYZ}}^{\,0} + \bar{\omega}_2 \times R$$

$$\dot{\bar{R}} = \bar{\omega}_2 \times \bar{R} = (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{2,1}) \times \bar{R}$$

$\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ יחסית ל- $\hat{I}',\hat{J}',\hat{K}'$ ($\bar{\omega}_{2,1}$)

$\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ יחסית לגוף ($\bar{\omega}_2$)

$\hat{I}',\hat{J}',\hat{K}'$ יחסית לגוף ($\bar{\omega}_0$)

$$[\bar{\omega}_2-(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{2,1})]\times\bar{R}=\bar{0}$$

* אסור לצמצם ב-$\bar{R}$! יכול להיות שהווקטור מקביל ל-$\bar{R}$.

המשוואה צריכה להתקיים לכל וקטור $\bar{R}$ שנבחר. לכן, מכיוון ש-$[\bar{\omega}_2-(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{2,1})]$ לא יכולים להיות מקבילים לשני וקטורים שונים מקבילים

בסה"כ, מתקבל $[\bar{\omega}_2-(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{2,1})]=\bar{0}$

$$\boxed{\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_{2,1}}$$

התאוצה הזוויתית בתנועה יחסית

$$\dot{\bar{\omega}}_2=\dot{\bar{\omega}}_1+\dot{\bar{\omega}}_{2,1}$$

$\bar{\omega}_{2,1}$ נגזר לפי הזמן ע"י גזירה במערכת $x'y'z'$ המצומדת לגוף 1.

$$\dot{\bar{\omega}}_{2,1}=\dot{\bar{\omega}}_{2,1\,x'y'z'}+\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_{2,1}$$

נציב ונקבל:

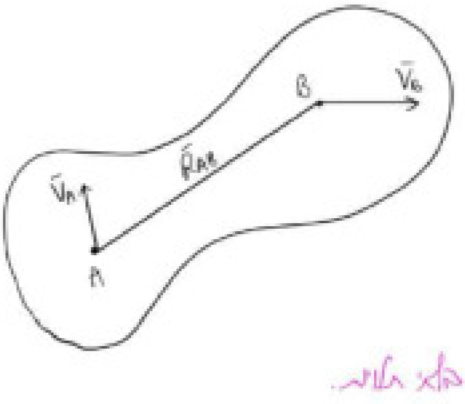
$$\boxed{\dot{\bar{\omega}}_2=\dot{\bar{\omega}}_1+\dot{\bar{\omega}}_{2,1\,x'y'z'}+\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_{2,1}}$$

מציאת המהירות הזוויתית של גוף בהינתן המהירויות של שתי נקודות בו

נניח שנתונות שתי נקודות A,B בגוף $\bar{V}_A,\ \bar{V}_B$.

השאלה - מה $\bar{\omega}$ של הגוף?

$$\bar{V}_B=\bar{V}_A+\bar{\omega}\times\bar{R}_{AB}$$



$$\bar{\omega}\times\bar{R}_{AB}=\bar{V}_B-\bar{V}_A$$ משוואה מהצורה- $\bar{u}\times\bar{a}=\bar{b}$

א) קיים פתרון רק אם מתקיים $\bar{R}_{AB}\cdot(\bar{V}_B-\bar{V}_A)=0$

תנאי שמשמעותו גוף קשיח.

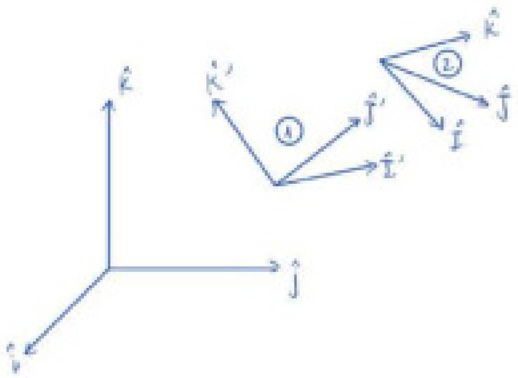
ב) אם התנאי אכן מתקיים יש לנו אינסוף פתרונות.

מסקנה: לקביעת $\bar{\omega}$ באופן חד משמעי יש צורך בנתון נוסף. רק 2 משוואות בלתי תלויות.

30.12.2019

<u>תכונות משוואת המהירות</u>

תנועה יחסית של מערכות:



$\hat I',\hat J',\hat K'$ סובבים ב- ω_1 יחסית ל- $\hat i,\hat j,\hat k$

$\hat I,\hat J,\hat K$ סובבים ב- ω_{21} יחסית ל- $\hat I',\hat J',\hat K'$.

$$\bar\omega_2=\bar\omega_{20}=\bar\omega_1+\bar\omega_{21}$$

$$\dot{\bar\omega}_2=\dot{\bar\omega}_1+\dot{\bar\omega}_{21}$$

$$\dot{\bar\omega}_2=\dot{\bar\omega}_1+\dot{\bar\omega}_{21\,x'y'z'}+\bar\omega_1\times\bar\omega_{21}$$

המהירות הזוויתית של אותו גוף זהה בכל נקודה של הגוף:

$$\bar V_B=\bar V_A+\bar\omega\times\bar R_{AB}\Rightarrow\bar\omega\times\bar R_{AB}=\bar V_B-\bar V_A\qquad(1)$$

משוואה מהצורה: $\bar u\times\bar a=\bar b$

1. תנאי לפתרון - $\bar R_{AB}\cdot(\bar V_B-\bar V_A)=0$

2. רק 2 משוואות בלתי תלויות ב-(1) - אינסוף פתרונות.

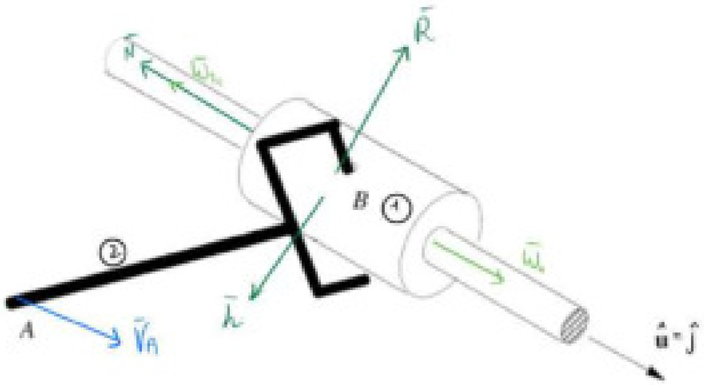
<u>דוגמה:</u>

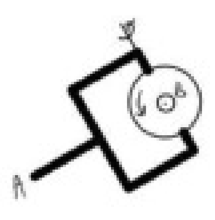
נתון - $\bar V_A=2\hat i\ [\frac{m}{s}]$

$\bar R=\bar R_{AB}=-\hat i+4\hat j-\hat k$

מצא - k. מהירות הנקודה B.

ב. המהירות הזוויתית של המנגנון.





$\bar V_B=V_B\hat j$

$\bar V_B=\bar V_A+\bar\omega\times\bar R$

$V_B\hat j-2\hat i=\bar\omega\times(-\hat i+4\hat j-\hat k)$

תנאי לפתרון: $(V_B\hat j-2\hat i)\cdot(-\hat i+4\hat j-\hat k)=0$

$2+4V_B=0\Rightarrow V_B=-0.5\ [\frac{m}{s}]$

$\bar V_B=-0.5\hat j$

$$-0.5\hat j-2\hat i=(\omega_x\hat i+\omega_y\hat j+\omega_z\hat k)\times(-\hat i+4\hat j-\hat k)\Rightarrow\begin{cases}-\omega_y-4\omega_z=-2\\ \omega_x-\omega_z=-0.5\\ 4\omega_x+\omega_y=0\end{cases}$$

רק 2 משוואות בלתי תלויות.

$\bar\omega_1=\omega_1\hat j$ של המתלה

$\bar\omega_{21}=\omega_{21}\hat n$ של המנגנון יחסית למתלה

$$\bar{\omega} = \omega_1 \hat{j} + \omega_{21} \hat{N}$$

$$\bar{\omega} = \omega_1 \hat{j} + \frac{\omega_{21}}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{k})$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\omega_{21}}{\sqrt{2}}\hat{i} + \omega_1 \hat{j} + \frac{\omega_{21}}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

ω_x | ω_y | ω_z

מציאת $\bar{N}$

$\bar{N}$ ניצב ל-$\hat{j}$

$\bar{N}$ ניצב ל- $\bar{R} = \bar{AB}$

$$\bar{N} = \hat{j} \times \bar{R} = \hat{j} \times (-\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$$

$$\bar{N} = -\hat{i} + \hat{k}$$

$$\hat{N} = \frac{-\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$$

הוקטור $\bar{\omega}$ נמצא במישור הנפרש ע"י $\bar{\omega}_1$ ו- $\bar{\omega}_{21}$, מישור הנפרש ע"י $\hat{j}$ ו- $\bar{N}$.

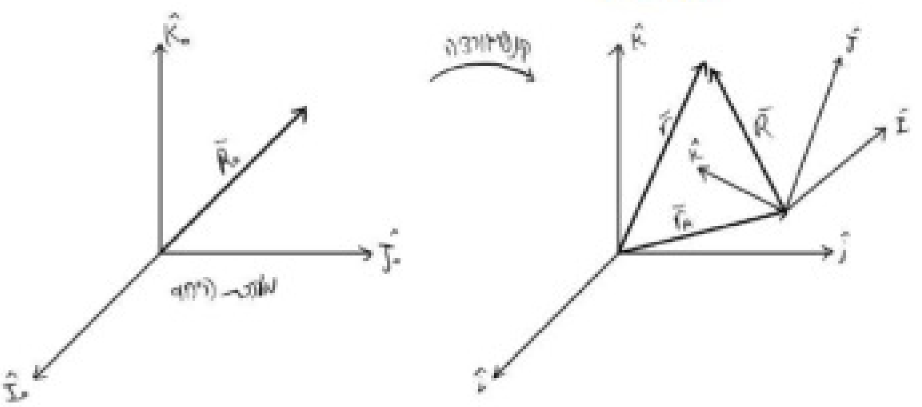
נמצא וקטור $\bar{h}$ הניצב למישור זה, אזי - $\boxed{\bar{\omega} \cdot \bar{h} = 0}$

$$\bar{h} = \hat{j} \times \bar{N} = \hat{j} \times (-\hat{i} + \hat{k}) = \hat{i} + \hat{k}$$

$$\bar{\omega} \cdot \bar{h} = (\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_x + \omega_z = 0}$$

משוואה שלישית למציאת $\bar{\omega}$

תנועת חלקיק יחסית לגוף קשיח



$$\bar{R}_0 = X_0 \hat{I}_0 + Y_0 \hat{J}_0 + Z_0 \hat{K}_0$$

המיקום של חלקיק יחסית לגוף הקשיח

X_0, Y_0, Z_0 משתנים בזמן

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{R}$$

$$\bar{R} = X_0 \hat{I} + Y_0 \hat{J} + Z_0 \hat{K}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_A + X_0 \hat{I} + Y_0 \hat{J} + Z_0 \hat{K}$$

$$\bar{R}_0(t) = X_0(t)\hat{I}_0 + Y_0(t)\hat{J}_0 + Z_0(t)\hat{K}_0$$

$$\bar{R}(t) = X_0(t)\hat{I}(t) + Y_0(t)\hat{J}(t) + Z_0(t)\hat{K}(t)$$

$$\dot{\bar{R}} = \dot{X}_0(t)\hat{I}(t) + X_0(t)\dot{\hat{I}}(t) + \dot{Y}_0(t)\hat{J}(t) + Y_0(t)\dot{\hat{J}}(t) + \dot{Z}_0(t)\hat{K}(t) + Z_0(t)\dot{\hat{K}}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{I}} &= \bar{\omega} \times \hat{I} \\ \dot{\hat{J}} &= \bar{\omega} \times \hat{J} \\ \dot{\hat{K}} &= \bar{\omega} \times \hat{K} \end{aligned}\right\}$$

$$\dot{\bar{R}} = \dot{X}_0 \hat{I} + \dot{Y}_0 \hat{J} + \dot{Z}_0 \hat{K} + X_0 \bar{\omega} \times \hat{I} + Y_0 \bar{\omega} \times \hat{J} + Z_0 \bar{\omega} \times \hat{K}$$

$$\dot{\bar{R}} = \dot{\bar{R}}_{XYZ} + \bar{\omega} \times \bar{R}$$

$$\dot{\bar{R}}_{XYZ} := \dot{X}_0 \hat{I} + \dot{Y}_0 \hat{J} + \dot{Z}_0 \hat{K}$$

מהירות החלקיק יחסית למערכת הנעה

$$\dot{\bar r} = \dot{\bar r}_A + \dot{\bar R}$$

$$\dot{\bar r} = \dot{\bar r}_A + \dot{\bar R}_{xyz} + \bar\omega \times \bar R$$

תאוצה במערכת גוף קשיח

תזכורת: כאשר שואלים אותנו נגזרת וקטור שנמדד ע"י צופה במערכת האינ' $\dot{\bar u} = \dot{\bar u}_{xyz} + \bar\omega \times \bar u$ לכל וקטור $\bar u$.

$\dot{\bar u}_{xyz} = \dot u_x \hat I + \dot u_y \hat J + \dot u_z \hat K$ - נגזרת יחסית

שזו הנגזרת היחסית כפי שמבחין חבר למערכת וקטור הבסיס אם הוא נמדד ע"י צופה במערכת $\hat I, \hat J, \hat K$.

$$\ddot{\bar r} = \ddot{\bar r}_A + \dot{(\dot{\bar R}_{xyz})} + \dot{(\bar\omega \times \bar R)}$$

נסמן $\bar u := \dot{\bar R}_{xyz}$.

$$\dot{\bar u} = \dot{\bar u}_{xyz} + \bar\omega \times \bar u$$

$$\dot{\bar u} = \dot{(\dot{\bar R}_{xyz})} = (\dot{\bar R}_{xyz})_{xyz}^{\cdot} + \bar\omega \times \dot{\bar R}_{xyz}$$

$$\dot{(\dot{\bar R}_{xyz})} = \ddot{\bar R}_{xyz} + \bar\omega \times \dot{\bar R}_{xyz}$$

$\ddot{\bar R}_{xyz} = \ddot X_0 \hat I + \ddot Y_0 \hat J + \ddot Z_0 \hat K$ - תאוצה של החלקיק יחסית למערכת (גוף הקשיח)

$$\dot{(\underbrace{\bar\omega \times \bar R}_{\bar u})} = \dot{(\underbrace{\bar\omega \times \bar R}_{\bar u})}_{xyz} + \bar\omega \times (\underbrace{\bar\omega \times \bar R}_{\bar u}) = \dot{\bar\omega}_{xyz} \times \bar R + \bar\omega \times \dot{\bar R}_{xyz} + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar R)$$

$$\dot{(\bar\omega \times \bar R)} = \dot{\bar\omega} \times \bar R + \bar\omega \times \dot{\bar R}_{xyz} + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar R)$$

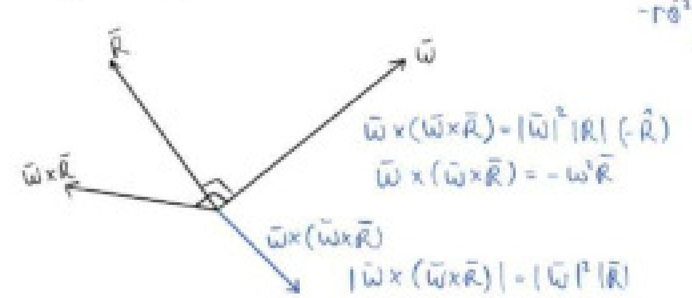
$$\ddot{\bar r} = \ddot{\bar r}_A + \ddot{\bar R}_{xyz} + \bar\omega(\bar\omega \times \bar R) + \dot{\bar\omega} \times \bar R + 2\bar\omega \times \dot{\bar R}_{xyz}$$

- $\ddot{\bar r}_A$ – תאוצת הראשית
- $\ddot{\bar R}_{xyz}$ – תאוצה יחסית לגוף
- $\bar\omega(\bar\omega \times \bar R)$ – תאוצה צנטריפטלית
- $\dot{\bar\omega} \times \bar R$ – תרומת התאוצה הזוויתית
- $2\bar\omega \times \dot{\bar R}_{xyz}$ – תאוצת קוריוליס

$$\dot{\bar\omega} = \dot{\bar\omega}_{xyz} + \cancel{\bar\omega \times \bar\omega}$$

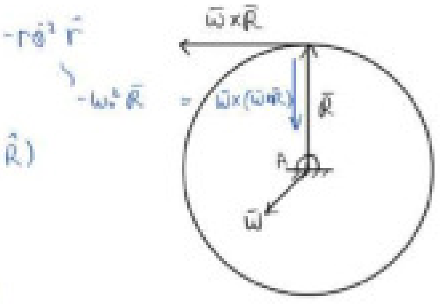
$\ddot{\bar r} = \ddot{\bar r}_A + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar R) + \dot{\bar\omega} \times \bar R$ - אם החלקיק שייך לגוף

$\bar\omega \times (\bar\omega \times \bar R)$ כאשר $\bar\omega$ ו-$\bar R$ ניצבים (במערכת מישורית למשל)



תאוצה צנטריפטלית

נקודה $\bar\omega = \omega_0 \hat k$



1.1.2020

מערכות מואצות בתנועה של גוף קשיח (תנועת חלקיק יחסית לגוף)

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{R}}_{xyz} + \bar{\omega}\times\bar{R}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}_A + \ddot{\bar{R}}_{xyz} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R}) + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{R} + 2\bar{\omega}\times\dot{\bar{R}}_{xyz}$$

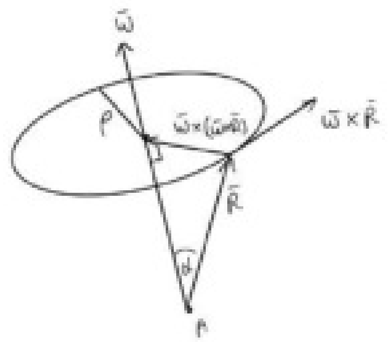
תאוצת ראשית מערכת הזזה — תאוצה יחסית — תאוצה צנטריפטלית — תאוצה (תאוצה) זוויתית — תאוצת קוריוליס

$$\left[\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}\right]$$

מהירות יחסית - $\dot{\bar{R}} = \dot{X}_0\hat{I} + \dot{Y}_0\hat{J} + \dot{Z}_0\hat{K}$

תאוצה יחסית - $\ddot{\bar{R}} = \ddot{X}_0\hat{I} + \ddot{Y}_0\hat{J} + \ddot{Z}_0\hat{K}$

תאוצה צנטריפטלית



תזכורת: כאשר $\bar{\omega}$ ניצב ל-$\bar{R}$ (אנך לתנועה מעגלית) $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R}) = -\omega^2 R$.

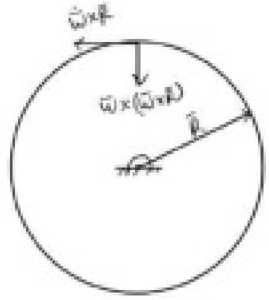
במקרה הכללי:

$$\rho = |\bar{R}|\sin\alpha$$

$$|\bar{\omega}\times\bar{R}| = |\bar{\omega}||\bar{R}|\sin\alpha = |\bar{\omega}|\rho$$

$$|\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R})| = \omega^2\rho$$

תרומת התאוצה הזוויתית



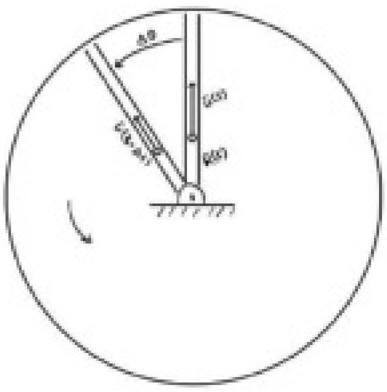
[תזכורת: תנועה יחסית של גופים קשיחים $\dot{\bar{\omega}}_2 = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_{21xyz} + \bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_{21}$]

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\hat{K}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{K}$$

(ניצב לתנועה מעגלית)

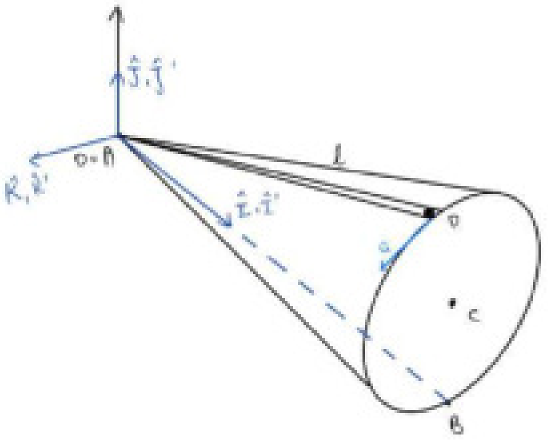
תאוצת קוריוליס



$$\dot{\bar{R}}_{xyz} = \bar{u}$$

$$\ddot{\bar{R}}_{xyz} = \bar{0}$$

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\hat{K}$$



דוגמה

$\overline{Oc}=\overline{Ac}$ סובב n סיבובים בשנייה סביב האנך.

ללא החלקה.

יש לחשב את התאוצה של חלקיק הנמצא בנקודה D בשני מקרים:

א) החלקיק נע במעגל על הקו יוצר OD של החרוט במהירות בגודל u יחסית לחרוט והתאוצה בגודל $\dot{u}$ יחסית לחרוט.

ב) החלקיק נע יחסית לחרוט במהירות בגודל קבוע u סביב הבסיס במעגל מלא.

בשני המקרים - $\dot{\bar{r}}_A=\ddot{\bar{r}}_A=\bar{0}$

$\bar{\omega}=-2\pi n\,ctg\alpha\,\hat{I}$

$\dot{\bar{\omega}}=-4\pi^2n^2ctg\alpha\,\hat{K}=\bar{\omega}_0\times\bar{\omega}$

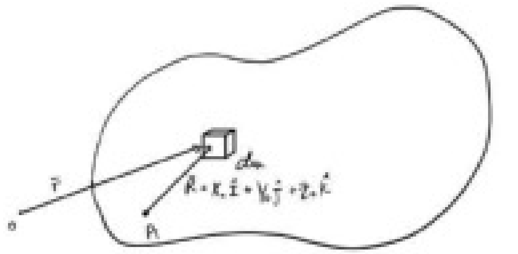
$\bar{R}=\overline{OD}=l\cos2\alpha\,\hat{I}+l\sin2\alpha\,\hat{J}$

$\hat{R}=\hat{OD}=\cos2\alpha\,\hat{I}+\sin2\alpha\,\hat{J}$

מקרה ב':	מקרה א':
$\dot{\bar{R}}_{xyz}=u\hat{k}$	$\dot{\bar{R}}_{xyz}=u(-\hat{R})$
$\ddot{\bar{R}}_{xyz}=\frac{u^2}{l\sin\alpha}(\sin\alpha\hat{I}-\cos\alpha\hat{J})$	$\ddot{\bar{R}}_{xyz}=\dot{u}(-\hat{R})$

דינמיקה של גוף קשיח

נוסח כללי: משוואות התנועה של גוף קשיח זהות לאלו של מערכת חלקיקים בהתאמה הבאה - $\sum_i \bigcirc m_i \Rightarrow \int_M \bigcirc dm$



	מערכת חלקיקים		גוף קשיח
מסה כוללת	$m=\sum m_i$	;	$m=\int_M dm=\int_V \rho\,dv$
מרכז מסה	$\bar{r}_c=\frac{\sum m_i\bar{r}_i}{\sum m_i}$	;	$\bar{r}_c=\frac{\int_M \bar{r}\,dm}{\int_M dm}$
תנע קווי	$\bar{P}=\sum m_i\dot{\bar{r}}_i$	;	$\bar{P}=\int_M \dot{\bar{r}}\,dm$
תנע זוויתי	$\bar{H}=\sum \bar{r}_i\times(m_i\dot{\bar{r}}_i)$	;	$\bar{H}=\int_M \bar{r}_i\times\dot{\bar{r}}_i\,dm$
תנע זוויתי במרכז המסה	$\bar{H}_c=\sum \bar{r}_i'\times(m_i\bar{r}_i^{(1)})$	;	$H_c=\int_M \bar{r}_i'\times\bar{r}_i^{(1)}\,dm$
אנרגיה קינטית	$T=\sum\frac{1}{2}m_i\dot{\bar{r}}\cdot\dot{\bar{r}}$	;	$T=\frac{1}{2}\int_M \dot{\bar{r}}\cdot\dot{\bar{r}}\,dm$

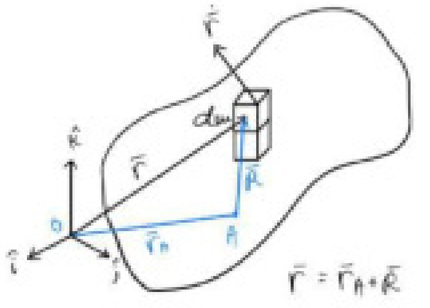
6.1.2020

דינמיקה של גוף קשיח

משוואת תנע קווי: $\sum \bar{F} = \dot{\bar{P}} = m\bar{a}_c$

משוואת תנע זוויתי: $\sum \bar{M}_{(c)} = \dot{\bar{H}}_{(c)}$ מומנט חיצוניים

חלקיקים $\sum_i \bigcirc m_i \Rightarrow \int_m \bigcirc dm$



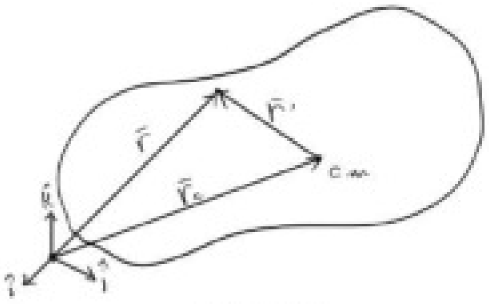
$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{R}$

$dm = \rho\, dr$

תנע זוויתי:

$\bar{H} = \sum_i \bar{r}_i \times (m_i \dot{\bar{r}}_i) \Rightarrow \bar{H} = \int_m \bar{r} \times \dot{\bar{r}}\, dm$

$\bar{H}_c = \sum_i \bar{r}_i' \times (m_i \dot{\bar{r}}_i^{(')}) \Rightarrow \bar{H}_c = \int_m \bar{r}' \times \dot{\bar{r}}'\, dm$



$\bar{r} = \bar{r}_c + \bar{r}'$

אנרגיה קינטית:

$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i \Rightarrow T = \frac{1}{2}\int_m \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}}\, dm$

$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + T_c$

$T_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i' \cdot \dot{\bar{r}}_i' \Rightarrow T_c = \frac{1}{2}\int_m \dot{\bar{r}}' \cdot \dot{\bar{r}}'\, dm$

אנרגיה קינטית יחסית למרכז המסה

היבטים לחישוב $\bar{H}$ ו-T עבור גוף קשיח

מקרה א': בגוף הקשיח יש נקודה נייחת A.

במקרה זה נוכל לבחור את מערכת הצירים O להיות A.

$O = A,\ \bar{r}_A = \bar{0},\ \dot{\bar{r}}_A = \bar{0},\ \bar{r} = \bar{R}$

עבור כל נקודה בגוף:

$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_A + \bar{\omega} \times \bar{R} = \bar{\omega} \times \bar{R}$ (with $\dot{\bar{r}}_A = 0$)

$$\boxed{\bar{H} = \int_m \bar{R} \times (\bar{\omega} \times \bar{R})\, dm}$$

$T = \frac{1}{2}\int_m \underbrace{(\bar{\omega}}_{a} \times \underbrace{\bar{R})}_{b} \cdot \underbrace{(\bar{\omega} \times \bar{R})}_{c}\, dm$

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a}$

$T = \frac{1}{2}\int_m [\bar{R} \times (\bar{\omega} \times \bar{R})] \cdot \bar{\omega}\, dm$

$T = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \left[\int_m \bar{R} \times (\bar{\omega} \times \bar{R})\, dm\right]$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}}$$

מקרה ב': בגוף אין נקודה נייחת.

במקרה זה נשתמש במשוואת התנע הזוויתי $\sum \bar{M}_c = \dot{\bar{H}}_c$

ונבחר את ראשית מערכת הגוף להיות במרכז המסה.

$A = c,\ \bar{r}_A = \bar{r}_c,\ \dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_c,\ \bar{r}' = \bar{R}$

$$\boxed{\bar{H}_c = \int_m \bar{r}' \times \dot{\bar{r}}'\, dm = \int_m \bar{R} \times (\bar{\omega} \times \bar{R})\, dm}$$

$T_c = \frac{1}{2}\int_m \dot{\bar{r}}' \cdot \dot{\bar{r}}'\, dm = \frac{1}{2}\int_m (\bar{\omega} \times \bar{R}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{R})\, dm$

$$\boxed{T_c = \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}_c}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{H}_c}$$

$$\boxed{\bar{H} = \bar{H}_c + \bar{r}_c \times (m \bar{V}_c)}$$

מסקנה: לצורך חישובי $\bar{H}, \bar{H}_c, T, T_c$

אנו צריכים לחשב את $\bar{H}_{(c)} = \int_m \bar{R} \times (\bar{\omega} \times \bar{R})\, dm$

טנזור אינרציה

$$\bar\omega\times\bar R=\begin{vmatrix}\hat I & \hat J & \hat K\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x_o & y_o & z_o\end{vmatrix}=\hat I(\omega_y z_o-\omega_z y_o)+\hat J(\omega_z x_o-\omega_x z_o)+\hat K(\omega_x y_o-\omega_y x_o)$$

$$\bar R\times(\bar\omega\times\bar R)=\begin{vmatrix}\hat I & \hat J & \hat K\\ x_o & y_o & z_o\\ \omega_y z_o-\omega_z y_o & \omega_z x_o-\omega_x z_o & \omega_x y_o-\omega_y x_o\end{vmatrix}=$$

$$=\hat I\left[\omega_x(y_o^2+z_o^2)-\omega_y x_o y_o-\omega_z x_o z_o\right]+\hat J\left[\omega_y(x_o^2+z_o^2)-\omega_z y_o z_o-\omega_x y_o x_o\right]+\hat K\left[\omega_z(x_o^2+y_o^2)-\omega_x x_o z_o-\omega_y y_o z_o\right]$$

$$H_x=\left(\int_m(y_o^2+z_o^2)dm\right)\omega_x+\left(-\int_m x_o y_o\,dm\right)\omega_y+\left(-\int_m x_o z_o\,dm\right)\omega_z$$

$$H_y=\left(-\int_m x_o y_o\,dm\right)\omega_x+\left(\int_m(x_o^2+z_o^2)dm\right)\omega_y+\left(-\int_m y_o z_o\,dm\right)\omega_z$$

$$H_z=\left(-\int_m x_o z_o\,dm\right)\omega_x+\left(-\int_m y_o z_o\,dm\right)\omega_y+\left(\int_m(x_o^2+y_o^2)dm\right)\omega_z$$

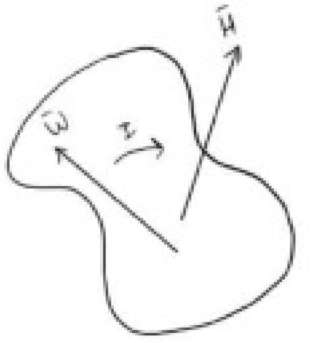
נגדיר את טנזור האינרציה -

$$[I]=\begin{pmatrix}I_{xx}=\int_m(y_o^2+z_o^2)dm & I_{xy}=-\int_m x_o y_o\,dm & I_{xz}=-\int_m x_o z_o\,dm\\ I_{yx}=I_{xy} & I_{yy}=\int_m(x_o^2+z_o^2)dm & I_{yz}=-\int_m y_o z_o\,dm\\ I_{zx}=I_{xz} & I_{zy}=I_{yz} & I_{zz}=\int_m(x_o^2+y_o^2)dm\end{pmatrix}$$

$$H_x=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z$$

$$H_y=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z$$

$$H_z=I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z$$



$$\{\bar H\}=\begin{pmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=[I]\{\bar\omega\}$$

[I] - מטריצה של המקדמים לינאריים I שמתארת את וקטור התנע הזוויתי - עבור כל הגוף הקשיח.

א. ככלל, $\bar H=I(\bar\omega)$ לא מקביל לוקטור $\bar\omega$.

ב. במקרה של גוף בו מישור של סימטריה X-Y - $\omega_x=\omega_y=0$, $\bar\omega=\omega_z\hat k$, $I_{xz}=0$, $I_{yz}=0$, $H_z=I_{zz}\omega_z$, $H_x=H_y=0$.

- $\bar H$ מקביל ל-$\bar\omega$

- רק המומנט I_{zz} משמעותי במטריצה [I].

$$\bar H=I_{zz}\omega_z\hat k$$

משפט שטיינר - צירים מקבילים

$$I_{xx}=I_{x_cx_c}+m(y_c^2+z_c^2)$$

כנ"ל לגבי I_{yy}, I_{zz} -

מומנט ראשי במרכז המסה

קואורדינטות מרכז המסה

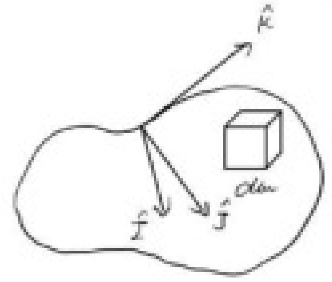
$$I_{xy}=I_{x_cy_c}-m x_c y_c$$

כנ"ל לגבי I_{xz}, I_{yz}

8.1.2020

טנזור האינרציה המוכללת

חישוב התנע הזוויתי -



רכיבי I קבועים במערכת $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ הצמודה לגוף.

$$H_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$H_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

$$\{\bar{H}\} = [I]\{\bar{\omega}\} \quad , \quad \bar{H}_{(c)} = I_{(c)}(\bar{\omega})$$

$$T_{(c)} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{H}_{(c)} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{I}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2}\{\bar{\omega}\}^T[I]\{\bar{\omega}\}$$

מומנטי האינרציה - I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_m (y_0^2 + z_0^2)\,dm$$

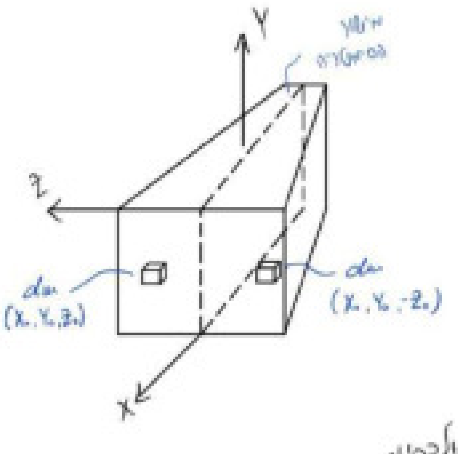
(מרחק מציר x בריבוע)

$$I_{zz} = \int_m (x_0^2 + y_0^2)\,dm$$

$$I_{xy} = -\int_m x_0 y_0\,dm = I_{yx}$$ - (מטריצה סימטרית)

נדון בכמה מקרים:

א) המקרה בו לגוף יש מישור סימטריה -



$$I_{xz} = -\int_m x_0 z_0\,dm = 0$$ - מתבטלים בזוגות

$$I_{yz} = 0$$

כאשר יש מישור סימטריה, מכפלות האינרציה שכוללות את הכיוון הניצב למישור הסימטריה מתאפסות.

מכאן אם יש שני מישורי סימטריה, כל מכפלות האינרציה מתאפסות ונשארים רק עם האלכסון.

* אין הבדל אם יש 3 או 2 מישורי סימטריה!

ב) המקרה הפרטי בו $\bar{\omega} = \hat{i}$ -

נניח שאנו דנים במקרה הפרטי בו $\bar{\omega} = \hat{i}$, $\omega_y = \omega_z = 0$, $\omega_x = 1$.

$$I(\hat{i})\cdot\hat{i} = \bar{H}\cdot\hat{i} = H_x = I_{xx}$$

$$I(\hat{i})\cdot\hat{j} = \bar{H}\cdot\hat{j} = H_y = I_{yx}$$

$$I(\hat{i})\hat{k} = \bar{H}\cdot\hat{k} = H_z = I_{zx}$$

$\Longrightarrow$

$I_{xx} = I(\hat{i})\hat{i}$	$I_{yx} = I_{xy} = I(\hat{i})\hat{j}$
$I_{yy} = I(\hat{j})\hat{j}$	$I_{zx} = I_{xz} = I(\hat{i})\hat{k}$
$I_{zz} = I(\hat{k})\hat{k}$	$I_{yz} = I_{zy} = I(\hat{j})\hat{k}$

$$I_{x_n x_n} = I(\hat{i}) \cdot \hat{i}$$

(under $\hat{i}$ and $\hat{i}$: חדש, חדש)

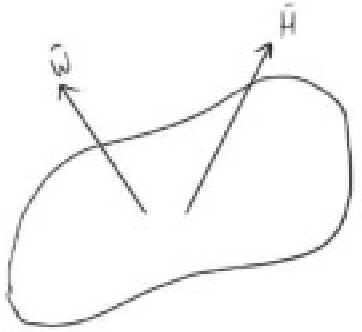
במערכת הישנה

נכתוב אותו גם כן במערכת הישנה

$$I_{xy} = I(\hat{i})\hat{j}$$

$$I_{xz} = I(\hat{i})\hat{k}$$

ד)



<u>שאלה</u>: למרות שבאופן כללי $\bar{H}$ לא מקביל ל-$\bar{\omega}$ באופן כללי,

האם יש (במקרה) וקטור $\bar{\omega}$ כך ש-$\bar{H}$ יהיה מקביל לו?

אם כן המצב, צריך להתקיים $\bar{H} = I(\bar{\omega}) = \lambda\bar{\omega}$ — האם קיים $\bar{\omega}$ שמקיים!

מבחינה אלגברית, $\bar{\omega}$ שמקיים את התנאי הזה הוא וקטור עצמי של I.

λ - ערך עצמי שמתאים לו.

לכן, השאלה שלנו היא - האם קיים ל-I וקטור עצמי ממשי $\bar{\omega}$?

<u>תשובה</u>: בגלל הסימטריה של I תמיד יש 3 וקטורים עצמיים ממשיים של I. תמיד קיימים 3 וקטורים עצמיים שמאונכים זה לזה!

* <u>מסקנה</u>: תמיד אנחנו יכולים לבחור מערכת צירים בה וקטורי היחידה יהיו וקטורים עצמיים. למערכת כזו קוראים מערכת צירים ראשית. נקרא לוקטורי היחידה בכיוונים אלו $\hat{i}_p, \hat{j}_p, \hat{k}_p$.

$$I(\hat{i}_p) = I_1 \hat{i}_p$$

$$I(\hat{j}_p) = I_2 \hat{j}_p$$

$$I(\hat{k}_p) = I_3 \hat{k}_p$$

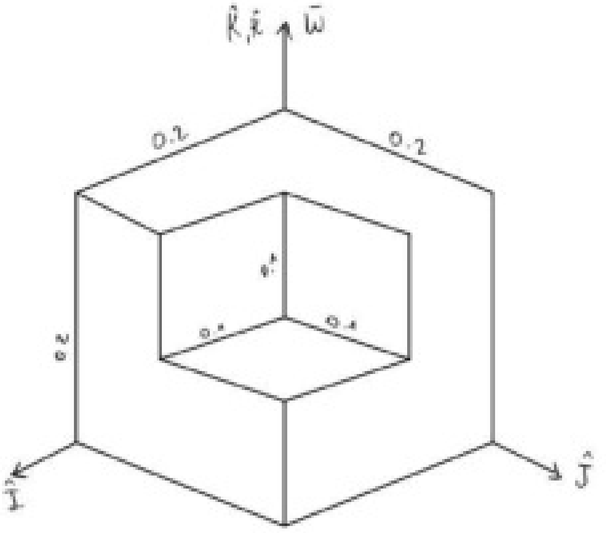
$$I_{x_p x_p} = I(\hat{i}_p) \cdot \hat{i}_p = I_1 \hat{i}_p \cdot \hat{i}_p = I_1$$

$$I_{x_p y_p} = I_{y_p x_p} = I(\hat{i}_p)\hat{j}_p = I_1 \cdot \hat{i}_p \cdot \hat{j}_p = 0$$

$$I_{y_p z_p} = I_{z_p y_p} = I(\hat{j}_p) \cdot \hat{k}_p = I_2 \hat{j}_p \cdot \hat{k}_p = 0$$

$$[I]_p = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

- במערכת הצירים הראשית, המטריצה אלכסונית.



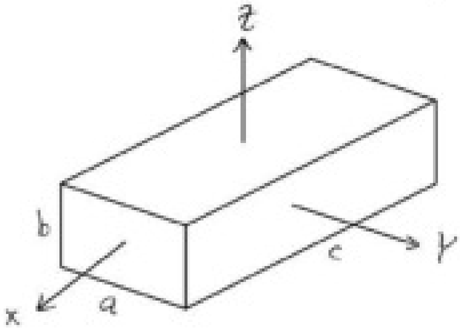
דוגמה -

$\bar{\omega} = 10\hat{k} = 10\hat{K}$

$m = 14\ Kg$

חשב: $\bar{H}$

טבלת מומנטי אינרציה



$I_{xx} = \frac{1}{12} m(a^2+b^2)$ וכו'

$I_{xy} = 0$ וכו'

$[I] = [I_1] - [I_2]$

הקוביה המלאה   הקוביה החסרה

$V = 0.2^3 - 0.1^3 = 0.007\ [m^3]$

בשני המקרים אין צורך להשתמש בשטיינר.

עבור הקוביה המלאה -

$\rho = \frac{14}{0.007} = 2000 \left[\frac{Kg}{m^3}\right] \Rightarrow m_1 = 2000 \cdot 0.2^3 = 16\ [Kg]$

$I_{xx} = I_{x_cx_c} + m(Y_c^2+Z_c^2) = \frac{1}{12} \cdot 16\,(0.2^2+0.2^2) + 16\,(0.1^2+0.1^2) = 0.427 = I_{YY} = I_{ZZ}$

$I_{x_cY_c} = I_{Y_cZ_c} = I_{Z_cX_c} = 0$

$I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ} = I_{YX} = I_{ZX} = I_{ZY} = -16 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = -0.16$

$$[I_1] = \begin{bmatrix} 0.427 & -0.16 & -0.16 \\ -0.16 & 0.427 & -0.16 \\ -0.16 & -0.16 & 0.427 \end{bmatrix}$$

עבור החלק שהורדנו - $X_c = Y_c = Z_c = 0.15$, $b = 0.1$

$m_2 = 2\ [Kg]$

$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{1}{12} \cdot 2\,(0.1^2+0.1^2) + 2 \cdot (0.15^2+0.15^2) = 0.093$

$I_{X_cY_c} = I_{Y_cZ_c} = I_{Z_cX_c} = 0$

$I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ} = I_{YX} = I_{ZX} = I_{ZY} = -2 \cdot 0.15 \cdot 0.15 = -0.045$

$$[I_2] = \begin{bmatrix} 0.093 & -0.045 & -0.045 \\ -0.045 & 0.093 & -0.045 \\ -0.045 & -0.045 & 0.093 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [I] = \begin{bmatrix} 0.427 & -0.16 & -0.16 \\ -0.16 & 0.427 & -0.16 \\ -0.16 & -0.16 & 0.427 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.093 & -0.045 & -0.045 \\ -0.045 & 0.093 & -0.045 \\ -0.045 & -0.045 & 0.093 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.334 & -0.115 & -0.115 \\ -0.115 & 0.334 & -0.115 \\ -0.115 & -0.115 & 0.334 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{H}\} = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = [I]\{\bar{\omega}\} = \begin{bmatrix} 0.334 & -0.115 & -0.115 \\ -0.115 & 0.334 & -0.115 \\ -0.115 & -0.115 & 0.334 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = -1.15\,\hat{I} - 1.15\,\hat{J} + 3.34\,\hat{k}$$

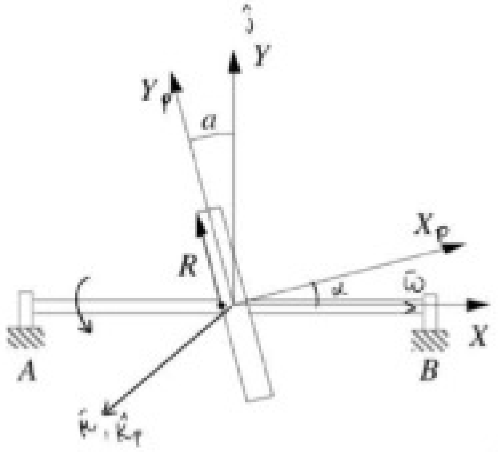
13.1.2020

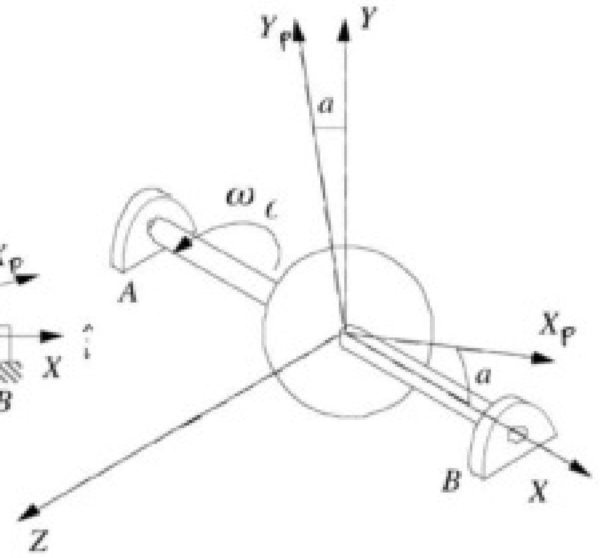
טנזור אינרציה

<u>דוגמה</u>

5.1.6 דוגמה

חשב עבור הדיסקה המתוארת בתרשים 7 , אשר סובבת במהירות קבועה סביב ציר המחובר בזווית α לצירה, את התנע הזוויתי, ואת רכיבי טנסור ההתמדה I_{XX}, I_{XY}, I_{XZ} יחסית לצירים X, Y, Z המתוארים בתרשים.





$\bar{\omega} = \omega_0 \hat{i}$ - קבוע

$I_{XX} = \frac{1}{2} mR^2$

$I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{1}{4} mR^2$

$I_{XY} = I_{YZ} = I_{XZ} = 0$

<u>פתרון א' (המקובל)</u> - לעבור למערכת הצירים הראשית.

$\hat{i} = \cos\alpha \, \hat{I}_p - \sin\alpha \, \hat{J}_p$

למה להשתמש במערכת הראשית? - ככה זה רשום בטבלאות.

$\bar{\omega} = \omega_0 \hat{i} = \omega_0 \cos\alpha \, \hat{I}_p - \omega_0 \sin\alpha \, \hat{J}_p$

- זה יותר פשוט.

$$\begin{Bmatrix} H_{xp} \\ H_{yp} \\ H_{zp} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{mR^2}{4} \begin{Bmatrix} \omega_0 \cos\alpha \\ -\omega_0 \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$H_{xp} = \frac{1}{2} mR^2 \omega_0 \cos\alpha$

$H_{yp} = -\frac{1}{4} mR^2 \omega_0 \sin\alpha$ => $\boxed{\bar{H} = \frac{1}{4} mR^2 \omega_0 \left(2\cos\alpha \, \hat{I}_p - \sin\alpha \, \hat{J}_p \right)}$

$H_{zp} = 0$

שיטה ב'

נמצא את רכיבי $[I]$ במערכת $\hat{I},\hat{J},\hat{k}$ ונכפיל ב-$\bar{\omega}$.

$$I_{XX}=I(\hat{I})\cdot\hat{I}$$

$$I_{XY}=I(\hat{I})\cdot\hat{J}=I_{YX}$$

$$I_{XZ}=I(\hat{I})\cdot\hat{k}=I_{ZX}$$

$$\begin{Bmatrix}H_X\\H_Y\\H_Z\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}I_{XX}&I_{XY}&I_{XZ}\\I_{YX}&I_{YY}&I_{YZ}\\I_{ZX}&I_{ZY}&I_{ZZ}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\hat{I}=\cos\alpha\,\hat{I}_P-\sin\alpha\,\hat{J}_P$$

$$\hat{J}=\sin\alpha\,\hat{I}_P+\cos\alpha\,\hat{J}_P$$

$$\{I(\hat{I})\}_P=[I]_P\{\hat{I}\}_P=\frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\\0\end{Bmatrix}=\frac{mR^2}{4}\begin{Bmatrix}2\cos\alpha\\-\sin\alpha\\0\end{Bmatrix}$$

$$I(\hat{I})=\frac{mR^2}{4}\left(2\cos\alpha\,\hat{I}_P-\sin\alpha\,\hat{J}_P\right)$$

$$\{I(\hat{J})\}_P=\frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{Bmatrix}$$

$$I(\hat{J})=\frac{mR^2}{4}\left(2\sin\alpha\,\hat{I}_P+\cos\alpha\,\hat{J}_P\right)$$

$$I_{XX}=I(\hat{I})\cdot\hat{I}=\frac{mR^2}{4}\left(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)$$

$$I_{YY}=I(\hat{J})\cdot\hat{J}=\frac{mR^2}{4}\left(2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$$

$$I_{XY}=I(\hat{I})\cdot\hat{J}=\frac{mR^2}{4}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned}I_{YZ}&=I(\hat{J})\cdot\hat{k}=0\\I_{XZ}&=I(\hat{I})\cdot\hat{k}=0\end{aligned}\right\}\text{ בגלל סימטריה}$$

$$\begin{Bmatrix}H_X\\H_Y\\H_Z\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}I_{XX}&I_{XY}&I_{XZ}\\I_{YX}&I_{YY}&I_{YZ}\\I_{ZX}&I_{ZY}&I_{ZZ}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\bar{H}=I_{XX}\omega_0\hat{I}+I_{XY}\omega_0\hat{J}$$

משוואות התנועה של גוף קשיח

משוואת תנע קווי: $\sum \bar{F} = m\bar{a}_c$

משוואת תנע זוויתי: $\sum \bar{M}_{(c)} = \dot{\bar{H}}_{(c)}$

סטטיקה ⟵ | ⟶ דינמיקה

המשימה: לחשב את $\dot{\bar{H}}$.

$$\bar{H} = I(\bar{\omega})$$

$$\{\bar{H}\} = [I]\{\bar{\omega}\}$$

אם אנחנו מחשבים את רכיבי I במערכת המצורפת לגוף אז רכיבי I לא תלויים בזמן!!!

$$\Rightarrow [\dot{I}]_{xyz} = [0]$$

$$\dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_{xyz} + \bar{\omega}\times\bar{H} \qquad (\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{u}}_{xyz} + \bar{\omega}\times\bar{u})$$

$$\dot{\bar{H}}_{xyz} = (I(\bar{\omega}))^{\cdot}_{xyz} = \cancel{\dot{I}_{xyz}}(\bar{\omega}) + I(\dot{\bar{\omega}}_{xyz})$$

$$\boxed{\dot{\bar{H}}_{xyz} = I(\dot{\bar{\omega}})}$$

$$I_{xy} := -\int_m X_0 Y_0 \, dm$$

$$\dot{\bar{u}}_{xyz} = \dot{u}_x \hat{i} + \dot{u}_y \hat{j} + \dot{u}_z \hat{k}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_{xyz} + \cancel{\bar{\omega}\times\bar{\omega}}$$

משוואת התנע הזוויתי לגוף קשיח -

$$\boxed{\sum \bar{M}_{(c)} = \dot{\bar{H}}_{(c)} = I_{(c)}(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega}\times\bar{H} = I_{(c)}(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega}\times(I_{(c)}(\bar{\omega}))}$$

הערות חשובות:

1. אם גוף מסתובב סביב ציר ראשי - $\bar{H}$ ו-$\bar{\omega}$ מקבילים $\Leftarrow$ $\bar{\omega}\times\bar{H} = \bar{0}$ $\qquad \sum \bar{M} = I(\dot{\bar{\omega}})$

2. תזכורת: אם התנועה היא מישורית - $\bar{H} \parallel \bar{\omega}$ ולכן -

$$\sum M_z = I_{zz}\ddot{\theta} \qquad \begin{cases} H_z = I_{zz}\omega_z \\ \sum M_z = \dot{H}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z \end{cases}$$

$\bar{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$

$\omega_z = \dot{\theta}$

$\dot{\omega}_z = \ddot{\theta}$

3. אם $\bar{\omega}$ קבוע $\Leftarrow$ $\dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$ $\qquad \sum M_{(c)} = \bar{\omega}\times\bar{H}_{(c)}$

א) אם הגוף מסתובב סביב ציר ראשי אז $\bar{\omega}\times\bar{H} = \bar{0}$ $\qquad \boxed{\sum \bar{M} = 0}$

ב) אם הגוף לא סובב סביב ציר ראשי, במקרה הכללי, $\sum \bar{M} \neq \bar{0}$, $\sum M$ מאונך ל-$\bar{\omega}$ ול-$\bar{H}$.

וקטור עצמי של I - ציר ראשי - $\bar{H}$ מקביל ל-$\bar{\omega}$

$$\bar{H} = I(\bar{\omega}) = \lambda\bar{\omega}$$

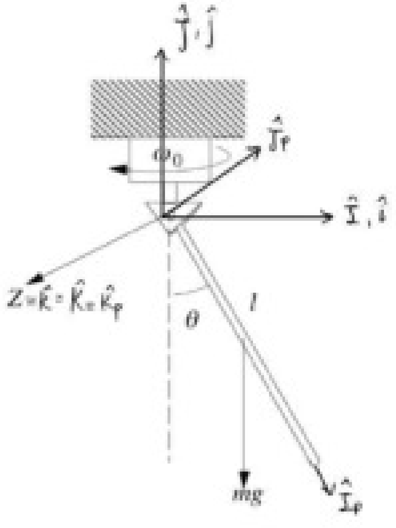
<u>דוגמה</u> -

המוט מחובר למתקן סביב הציר בנקודה O.

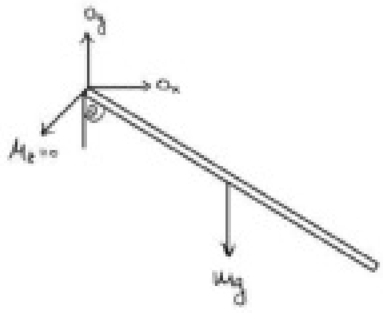
המוט סובב סביב האנך $\bar{\omega} = \omega_0 \hat{j}$

מה הקשר בין ω_0 ל-θ?

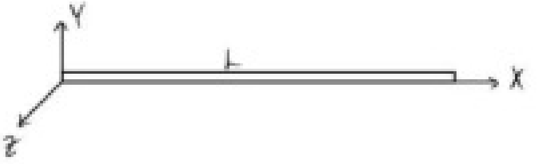
הנחה: θ קבועה.



תרשים 14



$$\sum M_z = \dot{H}_z = -\frac{1}{2} mg l \sin\theta$$



$$I_{xx} = 0$$

$$I_{YY} = I_{zz} = \frac{1}{3} mL^2$$

$$[I]_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{mL^2}{3}$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 \cos(90-\theta) \hat{J}_P - \omega_0 \cos\theta \hat{I}_P$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 \sin\theta \hat{J}_P - \omega_0 \cos\theta \hat{I}_P$$

$$\{\bar{H}\} = \frac{mL^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega_0 \cos\theta \\ \omega_0 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{mL^2 \omega_0}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\bar{H}} = \bar{\omega} \times \bar{H} = \begin{vmatrix} \hat{I}_P & \hat{J}_P & \hat{K}_P \\ -\omega_0 \cos\theta & \omega_0 \sin\theta & 0 \\ 0 & \frac{mL^2 \omega_0}{3} \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{K}_P \left(-\frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin\theta \cos\theta \right)$$

$$\sum M_z = -\frac{1}{2} mgL \sin\theta = -\frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin\theta \cos\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{3}{2} \frac{g}{L \omega_0^2}}$$

15.1.2020

דינמיקה של גוף קשיח

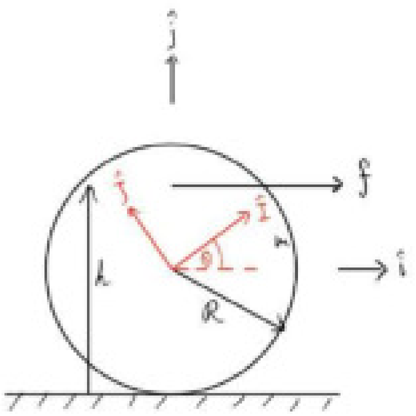
המשוואות (הבסיסיות):

תנע קווי: $\sum \vec{f} = m\vec{a}_c$

תנע זוויתי: $\sum \vec{M}_{(c)} = \dot{\vec{H}}_{(c)}$

$\vec{H}_c = I_{(c)}(\vec{\omega})$

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}}_{(c)} = \dot{\vec{H}}_{(c)xyz} + \vec{\omega}\times\vec{H}_{(c)} = I_{(c)}(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\vec{H}_{(c)}$$



$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$

דוגמה דו-מימדית

נתונים - f, h, R, m, μ_k, μ_s

דרוש: $\ddot{\vec{r}}_c, \ddot{\theta}$

$\sum f_x = m\ddot{x}$, $\ddot{\vec{r}}_c = \ddot{x}\hat{i}$

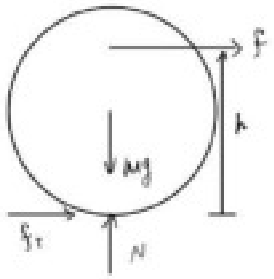
$\sum f_y = 0$

$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}} = (I_{zz}\omega_z\hat{k})^{\cdot} = I_{zz}\dot{\omega}_z\hat{k}$

$\boxed{\sum \vec{M} = I_{zz}\dot{\omega}_z\hat{k}}$ - תמיד נכון בבעיה דו-מימדית!

$I_{zz_c} = \frac{1}{2}mR^2$

סכמה -



$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$

הנחה: יש גלגול ללא החלקה.

יש קשר בין התאוצה $\ddot{x}$ ו- $\ddot{\theta}$:

$\vec{V}_0 = \vec{0} = \vec{V}_c + \vec{\omega}\times\vec{CO} = \dot{x}\hat{i} + \dot{\theta}\hat{k}\times(-R\hat{j}) = \dot{x}\hat{i} + R\dot{\theta}\hat{i} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = -R\dot{\theta}}$

(1) $\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -R\ddot{\theta}}$ → משוואה שנכונה תמיד לגלגול ללא החלקה!

(2) $\sum f_x = f + f_r = m\ddot{x}$

(3) $\sum M_{cz} = f_r R - f(h-R) = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}$

שתי המשוואות לא תלויות בהנחה!

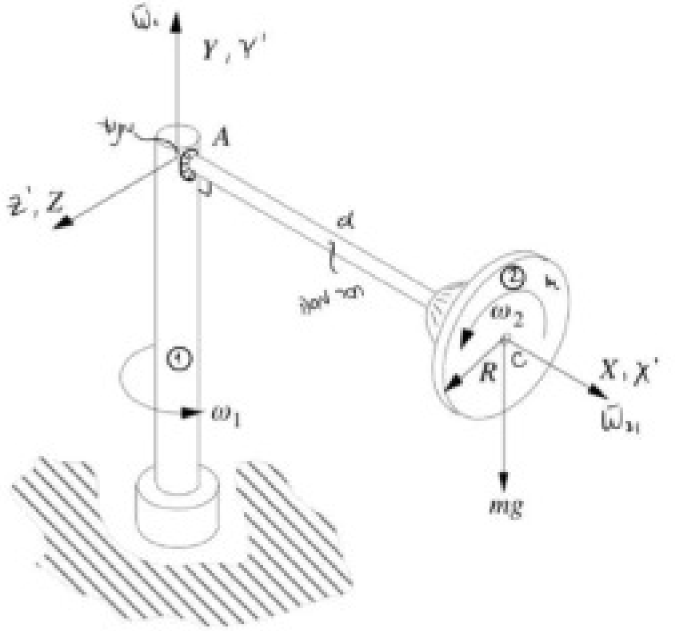
=> נכון גם במקרה של גלגול וגם החלקה.

=> $f_r, \ddot{x}, \ddot{\theta}$.

כעת ניתן לבדוק את נכונות הנחת הגלגול. כלומר - לבדוק האם אכן $|f_r| \le \mu_s N$.

אם ההנחה לא מתקיימת, $|f_r| > \mu_s N$, יש החלקה => במקום משוואה (1) תהיה המשוואה $|f_r| = \mu_k N$.

$\ddot{x}$ ו- $\ddot{\theta}$ בלתי תלויים אם יש החלקה.



<u>פתרון</u> -

X',Y',Z' מסתובבת יחד עם 1 מסתובבת ב- $\bar{\omega}_1 = \omega_1 \hat{J}'$

יחסית אליה.

X,Y,Z מסתובבת יחד עם 2, $\bar{\omega}_{21} = \omega_{21} \hat{I}'$ (נכון תמיד)

X,Y,Z ו- X',Y',Z' מתלכדות ברגע.

נתונים $\dot{\omega}_{21 X'Y'Z'}, \dot{\omega}_1, \omega_{21}, \omega_1$.

<u>שלבי הפתרון:</u>

1. חישוב תאוצת מרכז המסה -

מרכז המסה הוא נקודה הקבועה במערכת X',Y',Z'.

$$\bar{a}_c = \overset{0}{\bar{a}_A} + \overset{0}{\ddot{\bar{R}}_{XYZ}} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{R}) + (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{R}) + 2\bar{\omega} \times \overset{0}{\dot{\bar{R}}_{XYZ}}$$

$$\bar{a}_c = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{AC}) + \dot{\omega}_1 \hat{J}' \times \bar{AC}$$

$$\bar{AC} = d\hat{I}'$$

$$\bar{a}_c = -\omega_1^2 d\hat{I}' - \dot{\omega}_1 d\hat{K}'$$

2. חישוב $\dot{H}$ -

את המומנטים נחשב יחסית ל-A נ"ח בציר הקשיח.

$$I_{XX} = I_{XX_c} + m(Y_c^2 + Z_c^2)$$

$$I_{YY} = I_{YY_c} + m(X_c^2 + Z_c^2)$$

$$I_{ZZ} = I_{ZZ_c} + m(X_c^2 + Y_c^2)$$

$$I_{XY} = I_{XY_c} - m X_c Y_c$$

$$[I] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + md^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + md^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21} = \omega_1 \hat{J} + \omega_{21} \hat{I}$$

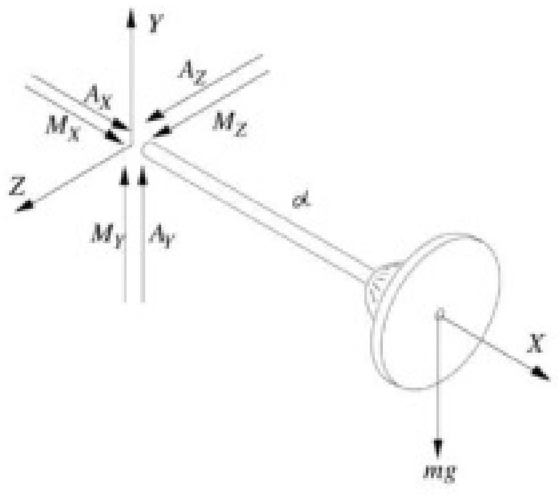
$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_{21\,X'Y'Z'} + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_{21} = \dot{\omega}_1 \hat{J} + \dot{\omega}_{21\,X'Y'Z'} \hat{I} + \omega_1 \hat{J} \times \omega_{21} \hat{I}$$

$$\Rightarrow \dot{H} = I(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega} \times (I(\bar{\omega})) = \sum \bar{M}$$

$$\sum M_x = \dot{H}_x = \frac{1}{2} mR^2 \, \dot{\omega}_{21\,X'Y'Z'}$$

$$\sum M_y = \dot{H}_Y = \left(\frac{1}{4} mR^2 + md^2\right) \dot{\omega}_1$$

$\sum M_z = \dot{H}_z = -\frac{1}{2} m R^2 \omega_1 \omega_{21}$



3. דיאגרמת גוף חופשי -

$\ddot{\vec{r}}_c = -\omega_1^2 d \hat{I} - \dot{\omega}_1 d \hat{K}$

$\sum F_x = A_x = (-\omega_1^2 d) m$

$\sum F_y = A_Y - mg = 0$

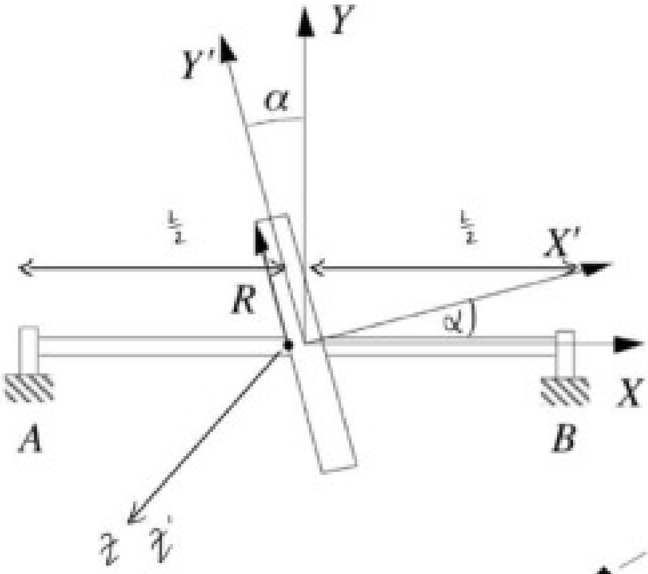
$\sum F_z = A_z = -m \dot{\omega}_1 d$

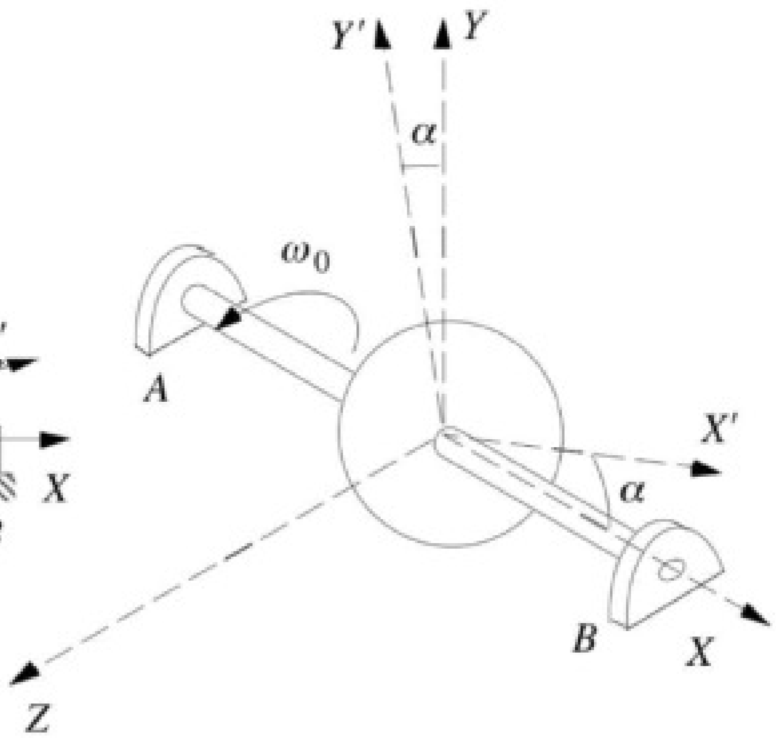
נדון במקרה הפשוט בו $\dot{\omega}_1 = \bar{0}, \ \dot{\omega}_{21 x'y'z'} = \bar{0}$

$M_{Bz} - mgd = -\frac{1}{2} m R^2 \omega_1 \omega_{21}$

במקרה בו $gd = \frac{1}{2} R^2 \omega_1 \omega_{21} \Leftarrow M_{Az} = 0$.

20.1.2020





דרוש לחשב את הראקציות המופעלות שהמיסב B על ציר מוט בר.

תשובות במערכת ראשית-

$$\bar{H} = mR^2\omega_0\left(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\,\hat{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\,\hat{J}'\right)$$

$$\bar{\omega} = \omega_0\left(\cos\alpha\,\hat{I}' - \sin\alpha\,\hat{J}'\right)$$

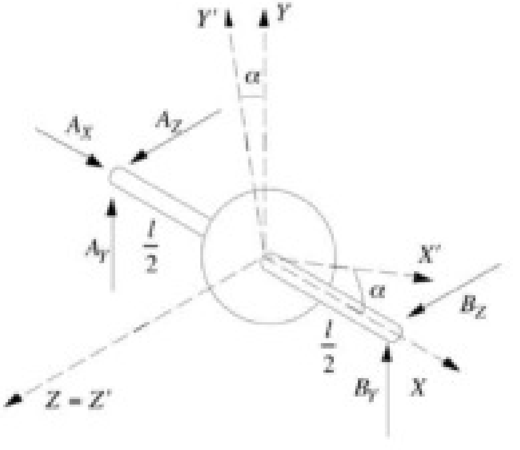
$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$$

$$\dot{\bar{H}} = I(\overset{0}{\dot{\bar{\omega}}}) + \bar{\omega}\times\bar{H} = \tfrac{1}{4}mR^2\omega_0^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{K}'$$

$\ddot{\bar{r}}_c = \bar{0}$ - מרכז המסה נייח $\Rightarrow \sum\bar{F} = \bar{0}$

*משוב קודם לא מאוזן מומנטים

דיאגרמת גוף חופשי -



$$\sum F_x = A_x = 0$$

$$\sum F_Y = A_Y + B_Y - mg = 0$$

$$\sum F_z = A_z + B_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = A_z\tfrac{L}{2} - B_z\tfrac{L}{2} = \dot{H}_Y = 0$$

$$\sum M_z = -A_Y\tfrac{L}{2} + B_Y\tfrac{L}{2} = \tfrac{1}{4}mR^2\omega_0^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$A_Z = B_Z = 0$$

$$A_Y = \frac{mg}{2} - \frac{1}{4L} mR^2 \omega_0^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$B_Y = \underbrace{\frac{mg}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4L} mR^2 \omega_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}$$

ריאקציות סטטיות:
תלויות ב- mg, לא
תלויות ב- $\bar{\omega}$.
כיוון קבוע במערכת
העולם.

ריאקציות דינמיות:
תלויות ב- $\bar{\omega}$, לא
תלויות ב- mg.
כיוון קבוע במערכת
הגוף.

-התגובות מחייבות איזון
דינמי

במערכת X,Y,Z

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & 0 \\ I_{XY} & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix} \qquad I_{XY} = I(\hat{I})\cdot\hat{J}$$

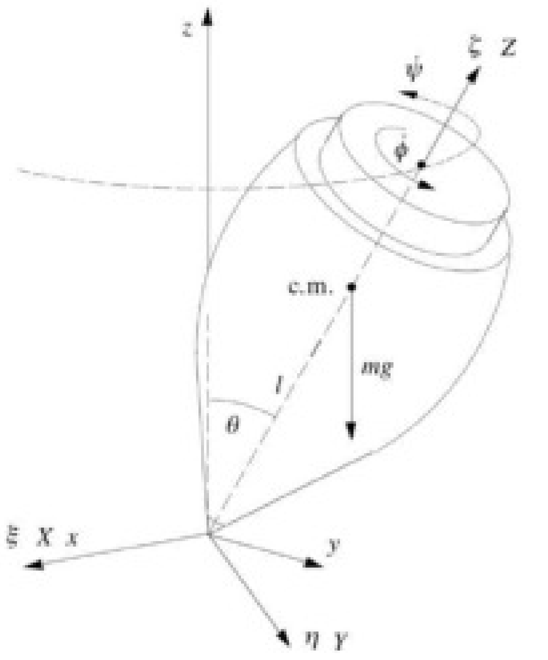
$$\{\bar{H}\} = \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & 0 \\ I_{XY} & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{XX}\omega_0 \\ I_{XY}\omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{H} = I_{XX}\omega_0\hat{I} + I_{XY}\omega_0\hat{J}$$

$$\sum \bar{M} = \dot{\bar{H}} = I(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega}\times\bar{H} = \omega_0\hat{I}\times\bar{H} = I_{XY}\omega_0^2\hat{K}$$

-המערכת לא מאוזנת כי $I_{XY} \neq 0$

-הגוף לא סובב סביב ציר ראשי!



דוגמה - סביבון

X',Y',Z' סובבת ב- $\bar{\omega}_1 = \dot{\psi}\hat{k}'$ יחסית ל- x,y,z.

במערכת זו ציר הסביבון קבוע.

X,Y,Z צמודה לסביבון ומסתובבת במערכת $\bar{\omega}_2 = \dot{\phi}\hat{K}' = \dot{\phi}\hat{K}$

יחסית ל- X',Y',Z'.

θ - קבועה , $\dot{\psi}$ - קבוע

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \dot{\psi}\hat{k} + \dot{\phi}\hat{k}'$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_{2\,x'y'z'} + \bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2 = \dot{\psi}\hat{k}\times(\dot{\phi}\hat{K})$$

מה הזווית θ שמקיימת את משוואות התנועה?

מסקנה <= הרצפה לא מפעילה מומנטים על הסביבון.

O - נקודה נייחת בסביבון.

$$[I] = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\omega} = \dot{\psi}\cos\theta\,\hat{k}' - \dot{\psi}\sin\theta\,\hat{j}' + \dot{\phi}\hat{k}'$$

(בהנחה $I_1 > I_0$)

$$\{\bar{H}\} = [I]\{\bar{\omega}\} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix} = -\dot{\psi}\sin\theta I_1 \hat{j}' + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) I_0 \hat{k}'$$

$$\dot{\bar{H}} = I(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega} \times \bar{H}$$

$$\dot{\bar{H}} = (I(\bar{\omega}))^{\cdot}_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{H}$$

$$\dot{I}_{xyz}(\bar{\omega}) + I$$

כתוצאה מהסימטריה של הסביבון, רכיבי I קבועים זמן במערכת $X'Y'Z'$ שנעה עם הגוף.

$$\dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_{x'y'z'} + \bar{\omega}_0 \times \bar{H}$$

$$\dot{\bar{H}}_{x'y'z'} = \dot{I}_{x'y'z'}(\bar{\omega}) + I(\dot{\bar{\omega}}_{x'y'z'})$$

$$\dot{I}_{x'y'z'} = [0]$$ - בגלל הסימטריה.

$\dot{\bar{\omega}}_{x'y'z'} = 0$ בגלל של-$\bar{\omega}$ יש רכיבים קבועים במערכת זו.

$$\dot{\bar{H}} = \bar{\omega}_0 \times \bar{H} = \dot{\psi}\sin\theta\left[(I_1 - I_0)\dot{\psi}\cos\theta - I_0\dot{\phi}\right]\hat{I}'$$

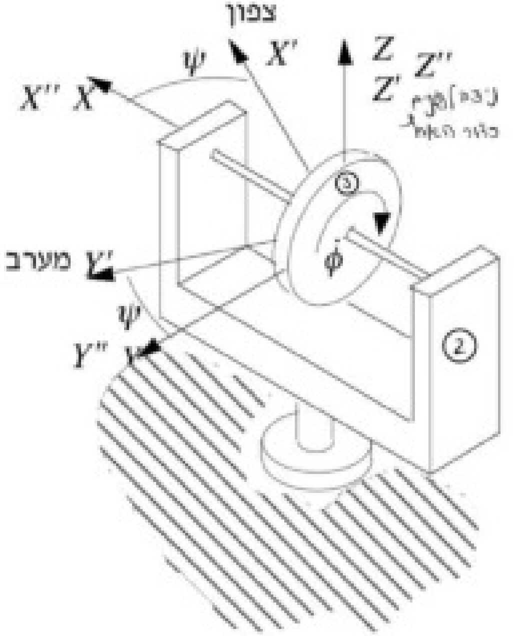
$$\sum \bar{M} = mgL\sin\theta(-\hat{I}') = \dot{\bar{H}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{I_0\dot{\phi}\dot{\psi} - mgL}{\dot{\psi}^2(I_1 - I_0)}$$

בהנחה שהמהירות גדולה מאוד, $I_1 > I_0$ אומר ש $\cos\theta > 0 \Leftarrow \theta < 90$.

22.1.2020

דוגמא - מצפן ג'ירוסקופי

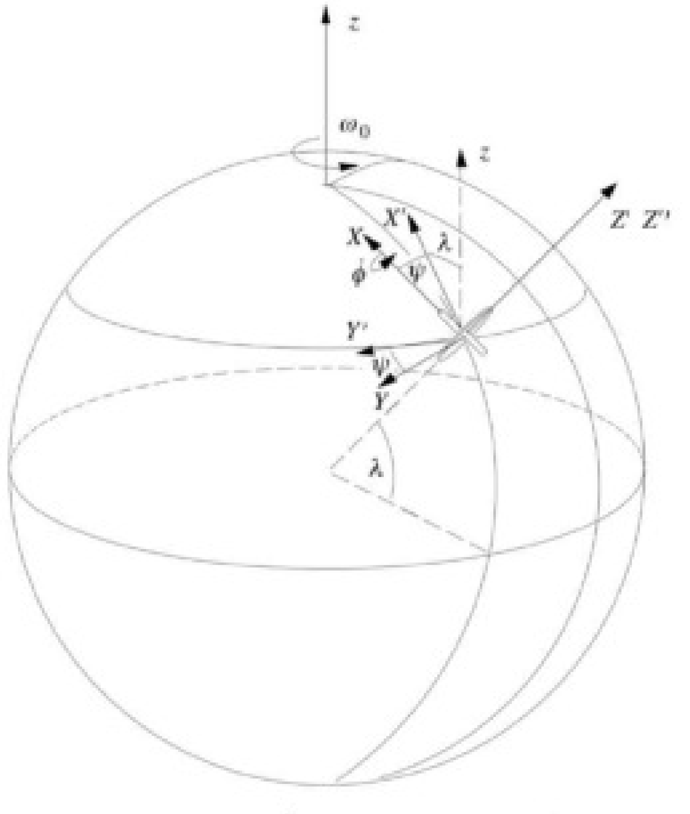


בדוגמה זו ננסה להראות את העיקרון עליו מבוססת פעולת מצפן גירוסקופי. המצפן מתואר בתרשים 21 והוא מכיל דיסקה אשר סובבת במהירות זוויתית קבועה $\dot{\phi}$ סביב ציר אופקי. הציר האופקי, המתואר על ידי ציר X בתרשים, חופשי לנוע סביב ציר אנכי, ציר Z' בתרשים. כלומר, כל המסגרת המתוארת חופשיה להסתובב במישור אופקי. הצפון מתואר בתרשים על ידי ציר X', והציר X אמור להצביע בכיוון הצפון וכך לשמש כמצפן. בתרשים מתואר מצב בו, כתוצאה מהפרעה כלשהי, המצפן מוסט בזווית ψ מהצפון. כדי להראות שהמצפן אכן ממלא את תפקידו, עלינו להראות שהוא ישאף לחזור לכיוון הצפון.

X'',Y'',Z'' צמודה למסגרת, מסתובבת ב-$\dot{\psi}$ יחסית לכדור הארץ.

X',Y',Z' צמודה לכדור הארץ.

X,Y,Z צמודה לרוטור. מסתובבת יחסית למסגרת ב-$\dot{\phi}$.



① - כדור הארץ.
② - מסגרת.
③ - רוטור.

יחסית לעולם.

$$\bar{\omega}_{10} = \omega_0 \hat{k} = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}\hat{k}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\bar{\omega}_{21} = \dot{\psi}\hat{k}'$$

$$\bar{\omega}_{32} = \dot{\phi}\hat{I}'' = \dot{\phi}\hat{I}'$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32}$$

$$\sum \bar{M} = \dot{\bar{H}} = I(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega}\times\bar{H}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{2}mR^2,\ I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{4}mR^2$$

$$\hat{k} = \cos\lambda\,\hat{I}' + \sin\lambda\,\hat{k}' \qquad \hat{k}'' = \hat{k}'$$

$$\hat{I}' = \cos\psi\,\hat{I}'' - \sin\psi\,\hat{J}'' \qquad (\hat{I}''=\hat{I},\ \hat{J}''=\hat{J})$$

למציאת $\dot{\bar{\omega}}$ נשתמש בנוסחה הכללית-

$$\dot{\bar{\omega}}_{20} = \dot{\bar{\omega}}_{10} + \dot{\bar{\omega}}_{21\,x'y'z'} + \bar{\omega}_{10}\times\bar{\omega}_{21}$$

אז נשתמש בנוסחה זו למציאת $\dot{\bar{\omega}}_{20}$.

$$\dot{\bar{\omega}}_{20} = \bar{0} + \ddot{\psi}\hat{k}' + \bar{\omega}_{10}\times(\dot{\psi}\hat{k}')$$

כדור הארץ סובב בקצב קבוע

$\bar{\omega}_{21} = \dot{\psi}\hat{k}'$ גזרה

③ כעת נשתמש במשוואה הכללית עבור הרוטור.

$\dot{\phi}$ קבועה

$$\dot{\bar{\omega}}_{30} = \dot{\bar{\omega}}_{20} + \dot{\bar{\omega}}_{32\,x'',y'',z''} + \bar{\omega}_{20}\times\bar{\omega}_{32} = \dot{\bar{\omega}}_{20} + \bar{0} + (\bar{\omega}_{10}+\bar{\omega}_{21})\times(\dot{\phi}\hat{I}'')$$

$$\Rightarrow \sum \bar{M} = \dot{\bar{H}} = I(\dot{\bar{\omega}}_{3o}) + \bar{\omega}_{2o} \times (I(\bar{\omega}))$$

$$\sum M_z = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\psi} + 2\omega_0 \dot{\phi} \cos\lambda \sin\psi + \omega_0^2 \cos^2\lambda \cos\psi \sin\psi = 0$$

$$\ddot{\psi} = -2\omega_0 \dot{\phi} \cos\lambda \sin\psi - \omega_0^2 \cos^2\lambda \cos\psi \sin\psi$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסובכת עבור התלות בזמן של הזווית ψ , שמתארת את הסטיה מהצפון. אולם ניתן לעשות את השיקולים הבאים. ראשית, $\ddot{\psi} = -2\omega_0\dot{\phi}\cos\lambda\sin\psi - \omega_0^2\cos^2\lambda\cos\psi\sin\psi$. מכיון שאגף ימין של המשוואה שלילי כאשר ψ חיובי (מפני שכל הכופלים חיוביים), כאשר יש הסטה של המצפן בכיוון מערב (ψ חיובי) יש תאוצה זוויתית בכיוון ההפוך. ולהפך, כאשר ψ שלילי, $\ddot{\psi}$ חיובי, ושוב תהיה מגמה למצפן לשוב לכיוון הצפון. כאשר ψ מתאפסת, כלומר, המצפן מצביע צפונה, התאוצה של ψ מתאפסת גם כן. אנו מסיקים שאם המצפן במנוחה ומצביע צפונה, הוא יתמיד במצב שווי משקל זה.

אם ψ קטנה - $\sin\psi \to \psi$

$\cos\psi \to 1$

$$\ddot{\psi} + \underbrace{2\omega_0 \dot{\phi} \cos\lambda}_{\text{קבוע } a^2} \psi = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\psi} + a^2 \psi = 0$$

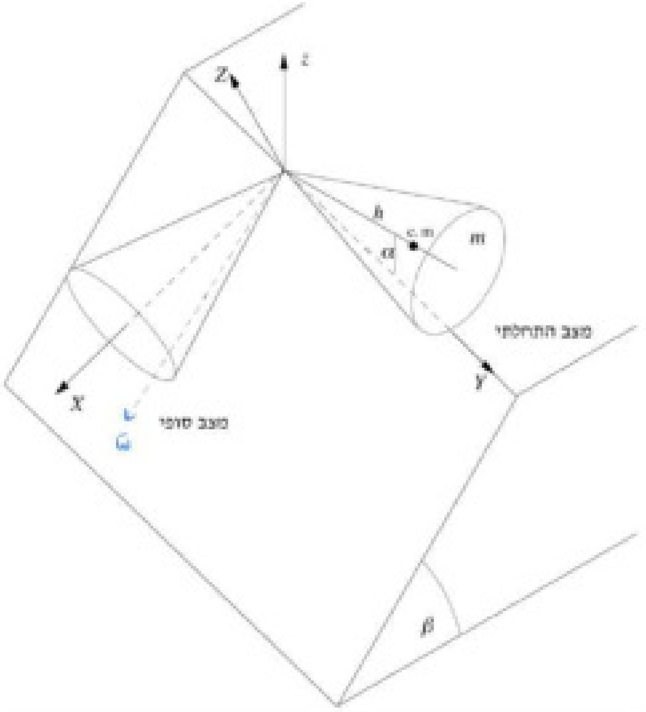
$$\psi = A \sin(at + \alpha)$$

תנועה הרמונית סביב הצפון ב- a רדיאנים לשניה.

28.1.2020

5.2.4 דוגמה

החרוט המתואר בתרשים 8 נמצא במנוחה על שפת מישור משופע, כך שהקו היוצר שלו אופקי. כתוצאה מהפרעה קטנה, החרוט מתחיל להתגלגל במורד המישור. מצא את המהירות הזוויתית של החרוט ואת מהירות הנקודה הנמצאת במרכז הבסיס, לאחר שצירו סב 90°, והוא נמצא במורד המישור. מסת החרוט m, גובהו h והזווית בין צירו לקו היוצר היא α.



$$T=\frac{1}{2}\bar\omega\cdot\bar H=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}\bar\omega\cdot\bar H_c \quad , \bar H_{(0)}=I_{(0)}(\bar\omega)$$

הבסיס לשריון - פועל רק כוח הכובד שמבצע עבודה, וולק

$$W_{12}=T_2-T_1=U_1-U_2$$

$$mg(z_1-z_2)=T_2$$

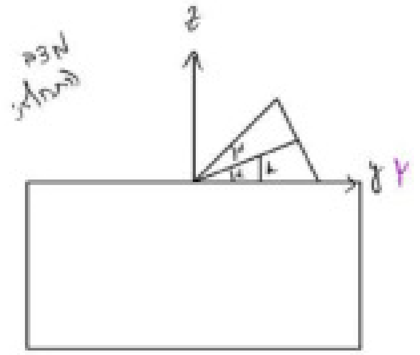
$$mg\left(\frac{3}{4}h\sin\alpha-\left(-\frac{3}{4}h\sin(\beta-\alpha)\right)\right)=T_2$$

$$I_{xx}=\frac{3}{10}mR^2$$

$$I_{yy}=I_{zz}=\frac{3}{20}mR^2+\frac{3}{5}mh^2$$

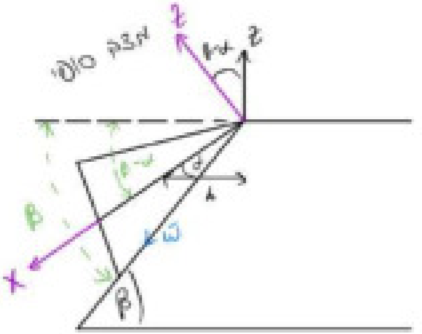
$$\bar H=I(\bar\omega)$$

$$\begin{Bmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}I_{xx}&0&0\\0&I_{yy}&0\\0&0&I_{zz}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\omega\cos\alpha\\0\\-\omega\sin\alpha\end{Bmatrix}$$



$$\bar H=I_{xx}\omega\cos\alpha\,\hat i+0\hat j-I_{yy}\omega\sin\alpha\,\hat k$$

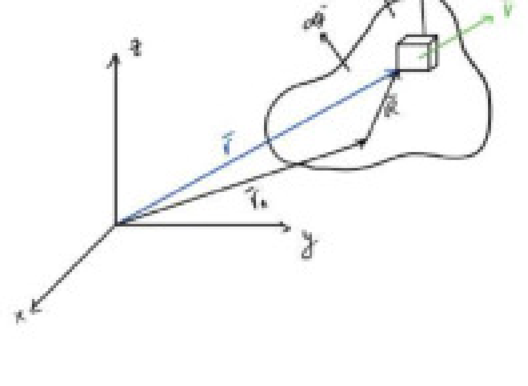
לזכור - מומנט אינרציה של טבעת ברדיוס R סביב ציר x - $I_{xx}=mR^2$



$$T=\frac{1}{2}\bar\omega\cdot\bar H=\frac{1}{2}I_{xx}\omega^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}I_{yy}\omega^2\sin^2\alpha$$

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\left(I_{xx}\cos^2\alpha+I_{yy}\sin^2\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{mg(\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha))}{h\sin^2\alpha\,(6+tg^2\alpha)}}$$



הספקים בתנועת גוף קשיח

$dP=d\bar F\cdot\bar v$ - ההספק של הכוח $d\bar F$ שפועל על האלמנט

שימו לב המיקום $\bar r_A+\bar R=\bar r$.

$$P=\int_V d\bar F\cdot\bar v$$

אזי $\bar{V} = \bar{V}_A + \bar{\omega}\times\bar{R}$

נציב ונקבל -

$$P = \int_V d\bar{f}\cdot(\bar{V}_A + \bar{\omega}\times\bar{R}) = \int_V d\bar{f}\cdot\bar{V}_A + \int_V d\bar{f}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{R}) = \bar{V}_A\cdot\int_V d\bar{f} + \int_V \bar{\omega}\cdot(\bar{R}\times d\bar{f})$$

$$d\bar{f}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{R}) \Rightarrow \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{\omega}\cdot(\bar{R}\times d\bar{f})$$

$$\boxed{P = \bar{f}\cdot\bar{V}_A + \bar{\omega}\cdot\bar{M}_A}$$

משוואות אוילר

משוואות התנע הזוויתי של גוף קשיח המוצב בראשית -

משוואות התנע הזוויתי - $\sum\bar{M} = \dot{\bar{H}} = I(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega}\times(I(\bar{\omega}))$

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{xx}\omega_x \\ I_{yy}\omega_y \\ I_{zz}\omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\omega}\times\bar{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_{xx}\omega_x & I_{yy}\omega_y & I_{zz}\omega_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left[(I_{zz}-I_{yy})\omega_y\omega_z\right] + \hat{j}\left[(I_{xx}-I_{zz})\omega_x\omega_z\right] + \hat{k}\left[(I_{yy}-I_{xx})\omega_x\omega_y\right]$$

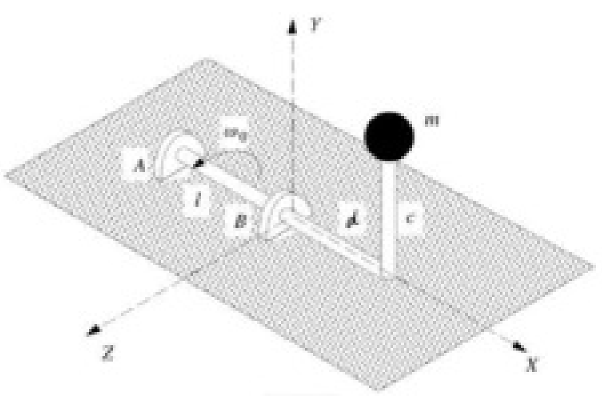
$$[I]\{\dot{\omega}\} = \begin{Bmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z \end{Bmatrix}$$

משוואות אוילר -

$$\boxed{\begin{aligned} \sum M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz}-I_{yy})\omega_y\omega_z \\ \sum M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx}-I_{zz})\omega_x\omega_z \\ \sum M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy}-I_{xx})\omega_x\omega_y \end{aligned}}$$

5.3.5 דוגמה

בכדי להמחיש באופן הפשוט ביותר מספר היבטים של הדינמיקה של גוף קשיח, נדון שוב במערכת של דוגמה 5.1.4 המתוארת שוב בתרשים 11. נתון שהמהירות הזוויתית במצב המתואר היא ω_0 , ובצירים פועל חיכוך, שיוצר מומנט בגודל M_f בכיוון הפוך למהירות. דרוש לחשב את התאוצה הזוויתית והריאקציות במיסבים A, B בהנחה שהמיסב B אינו נושא עומס צירי.



תרשים 11

א) תאוצה זוויתית?

ב) ריאקציות?

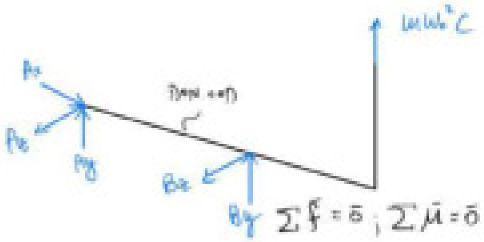
<u>לפי חלקים -</u>

גוף המסתובב במעגל ברדיוס C בקצב $\omega_0 = \dot{\theta}$

$\bar{V} = C\omega_0\hat{k} = C\omega_0\hat{\theta}$

שלב א' - נחשב את התאוצה (הח) קיק $\bar{a} = \omega_0^2 c(-\hat{j})$. ונכתב (בנוסף) את -

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} = -m\omega_0^2 c\hat{j}$$



$$\sum \bar{F} = \bar{0} \ ; \ \sum \bar{M} = \bar{0}$$

שלב ב' - נחשב את $\bar{H}$.

$$\bar{H} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times (m\bar{v}) = (d\hat{i} + c\hat{j}) \times (c\omega_0 \hat{k}) m = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & c\omega_0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{H} = m(c^2\omega_0 \hat{i} - dc\,\omega_0 \hat{j})$$

$$\sum \bar{M} = \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{r}} \times (m\bar{v}) + \bar{r} \times (m\bar{a})$$

$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

<u>לפי הגוף הקשיח</u> -

$$\bar{\omega} = \omega_0 \hat{i}$$

מערכת צמודה לגוף, ראשית בנקודה הנייחת B.

$$I_{xx} = \int (y_0^2 + z_0^2)\,dm = mc^2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int x_0 y_0\,dm = -mdc$$

$$I_{yy} = md^2$$

$$I_{zz} = \int (x_0^2 + y_0^2)\,dm = m(d^2 + c^2)$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & -mdc & 0 \\ -mdc & md^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(d^2+c^2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= mc^2\omega_0 \\ H_y &= -mdc\,\omega_0 \\ H_z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{כמו קודם.}$$

$$\sum \bar{M} = I(\dot{\bar{\omega}}) + \bar{\omega} \times \bar{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ mc^2\omega_0 & -mdc\omega_0 & 0 \end{vmatrix} = -mdc\,\omega_0^2 \hat{k}$$