ציון: 98

אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תש"פ

# חדו"א להנדסה 1 (201-1-9711) - בוחן

המרצים: נעה איידלשטין, אבי גורן, תם מאירוביץ, נינה צ'רניבסקי, אירנה לרמן, יונה מייזל וארקדי ליידרמן.

**תאריך:** 20 בדצמבר 2019
**משך הבחינה:** 90 דקות
**חומר עזר:** אסור שימוש בחומר עזר כלשהו. אין להשתמש במחשבון.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 100. עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. בשאלות הפתוחות, יש להסביר בעברית בצורה תמציתית וברורה מה אתם עושים ומדוע. יש לכתוב את התשובות במקום המיועד לכך בלבד. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים. **בשאלות "סגורות" הניקוד ינתן עבור תשובה סופית בלבד.** אם בסעיף מסויים המקום אינו מספיק, ניתן להשתמש בדף הריק שבסוף המבחן. במקרה זה יש לציין באופן ברור במקום המיועד לתשובה שיש המשך לפיתרון והיכן, וכן לציין בדף הנוסף לאיזה סעיף או סעיפים מתייחס המשך התשובה.

**שימו לב:** דפי הטיוטא לא יבדקו וישלחו למגרסה.

בהצלחה!

הקשן מאורי הדף

1. (33 נק') נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ —

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{x}, & x\geq 0\\ x+2, & x<0.\end{cases}$$

האם הפונקציה $f$ הפיכה? אם כן, רשמו את הנוסחה לפונקציה ההופכית והסבירו מדוע הנוסחה שרשמתם אכן מתארת את הפונקציה ההופכית. אם $f$ לא הפיכה, הסבירו מדוע.

משפט: $f(x)$ הפיכה אמ"ם $f$ חח"ע ועל

נראה ש $f(x)$ חח"ע: $f$ חח"ע אם עבור $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$

נניח ש $x_1\neq x_2$

עבור הקטע $[0,\infty)$: $2e^{x_1}=2e^{x_2}$ $/:2$

$e^{x_1}=e^{x_2}$ $/\ln$

$x_1\ln e=x_2\ln e$ , $\ln e=1$

$x_1=x_2$

קיבלנו סתירה שעבור $x_1\neq x_2$ $f(x_1)$ לא יכול להיות שווה ל $f(x_2)$

לכן בתחום $x\geq 0$ $f(x)$ חח"ע.

$e^x$ פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע $x\geq 0$ לכן מונוטונית עולה ממש.

לכל $x_4$ ו $x_3$ שנבחר מתקיים שעבור $x_4>x_3$ ש $f(x_4)>f(x_3)$

$e^x$ פונקציה אלמנטרית, לכן משמע פונקציה אלמנטרית רציפה בתחום הגדרתה.

לכן $f$ מקבלת כל ערך (ביניים) בקטע $x\geq 0$, $Img_f=[2,\infty)$

- - - - - - - - - - - - - - - -

עבור $x<0$ נראה ש $f$ חח"ע: נניח $x_2\neq x_1$ אבל מתקיים:

$f(x_1)=f(x_2)$

$x_1+2=x_2+2$ $/-2$

$x_1=x_2$

הוכחת שלא עבד שב-$f$ חח"ע, זה לא אומר ש-$f$ חח"ע

קיבלנו סתירה שעבור $x_2\neq x_1$ מתקיים $f(x_2)=f(x_1)$, לכן עבור $x_1\neq x_2$ אז $f(x_1)\neq f(x_2)$

לכן $f(x)$ חח"ע ב $x<0$. $x+2$ זו פונקציה מונוטונית עולה ממש כי

עבור $x_4>x_3$ מתקיים $x_4+2>x_3+2$ לכן, $f(x)$ פונקציה אלמנטרית רציפה

בתחום הגדרתה $x+2$ זו פונקציה אלמנטרית. לכן מקבלת כל ערך (ביניים) בקטע

$x<0$, $Img_f=(-\infty,2)$. $\lim_{x\to 0^+}2e^x=2e^0=2$, $\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2$, $f(0)=2$

$f(x)$ חח"ע בכל תחום הגדרתה. כי $f(x)$ $\mathbb{R}=Img_f=(-\infty,\infty)$

נמצא את הפונקציה ההפוכה עבור $x\geq 0$:

$f(x)=2e^x$

$x=2e^{f^{-1}(x)}$

$\frac{x}{2}=e^{f^{-1}(x)}$ $/\ln$ $\to$ $\ln\frac{x}{2}=f^{-1}(x)$

המשך מעבר

המשך שאלה 1

$:x<0$

$f(x) = x+2$

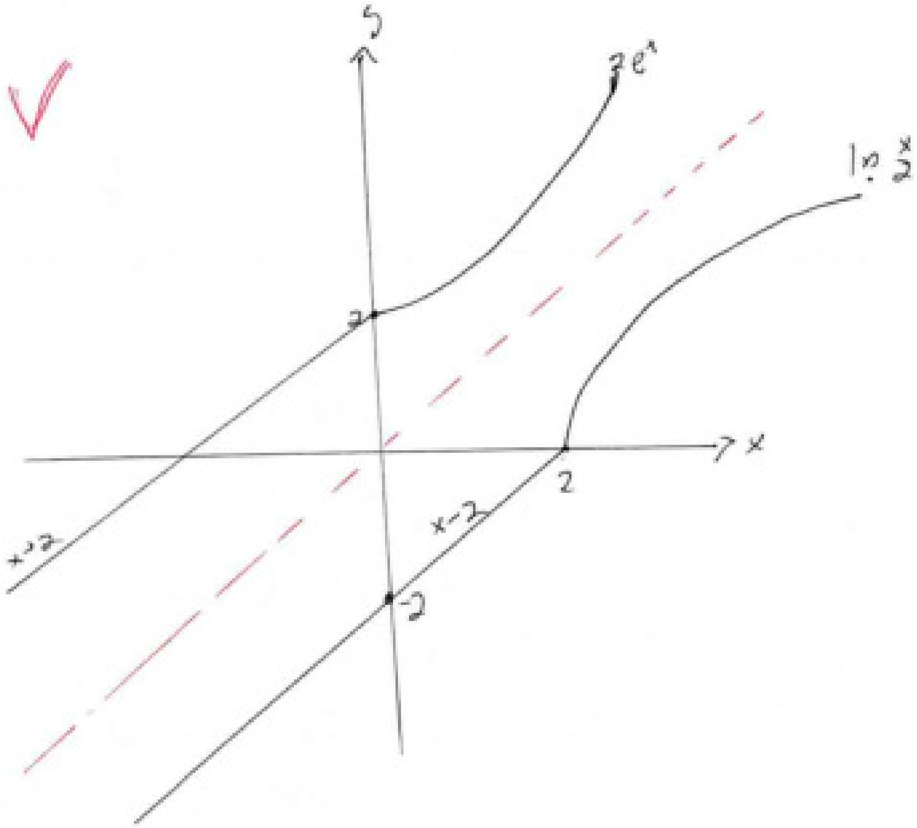
$x = f^{-1}(x) + 2$

$\boxed{x-2 = f^{-1}(x)}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln\frac{x}{2} & x \geq 2 \\ x-2 & x < 2 \end{cases}$$

$Im\, f^{-1} = (-\infty, \infty)$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$




31

תשובה סופית

לא נכון

(2) (א) על כל אחת מהטענות הבאות, סמנו נכון או לא נכון:

(i) (7 נק') סידרה חסומה היא בהכרח מונטונית. נכון / לא נכון

(ii) (7 נק') כל סידרה מחזורית ומונוטונית מתכנסת. נכון / לא נכון

הבהרה: סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת מחזורית אם קיים $k>0$ טבעי כך ש $a_{n+k}=a_n$ לכל $n$.

נכון

תשובה סופית

(ב) (20 נק') חשבו את הגבול הבא או הראו שאינו קיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}-\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})\right)$$

**אין להשתמש בכלל לופיטל**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)=\sin\frac{1}{n}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}=\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}=\cot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}-\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$$

נסמן

$$\frac{1}{n}=t$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{t\to 0}t$$

$$\cos(2\cdot\tfrac{t}{2})=1-2\sin^2\tfrac{t}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t(1-\cos t)}{t\sin t}\overset{?}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{t}{2})}{(\frac{t}{2})}\lim_{t\to 0}\frac{t}{2}\frac{\sin(\frac{t}{2})}{(\frac{t}{2})}=1\cdot 1\cdot 0=0$$

גבול ידוע $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}$

$\frac{t}{2}$ רציפה ב $t=0$ לכן אם $F(t)=\frac{t}{2}$

$F(0)=0$

כי אלמנטרי וגם

אלמנטרי רציפה

בתחום הגדרה.

20

3. (א) (13 נק') מה פירוש המשפט "לפונקציה $f$ יש נקודת אי־רציפות מסוג "קפיצה (או אי־רציפות מסוג ראשון) ב $x = 3$"?
הגדירו במדויק.

א. רציפות מסוג קפיצה: פירוש הוא שקיימים שני הגבולות החד צדדים

כלומר: $\lim_{x\to3^+} f = L$ ; $\lim_{x\to3^-} f = K$ קיימים אבל

$\lim_{x\to3^-} f(x) \neq \lim_{x\to3^+} f(x)$

$\Downarrow$

$K \neq L$

13

(ב) (20 נק') חשבו את הגבול או הראו שאינו קיים:

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{3\log_4(1+x)}$$

**אין להשתמש בכלל לופיטל**

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{3\log_4(1+x)} = \lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)}{x}\cdot\frac{x}{3\log_4(1+x)} \overset{!}{=} \lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{3\log_4(1+x)}$$

$$\underset{\downarrow}{=} \ln 2\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{3\log_4(1+x)} = \frac{\ln 2}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_4(1+x)} \underset{\downarrow}{=} \frac{\ln 2}{3}\cdot \frac{1}{\ln 4}$$

$\ln a = \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$

$\frac{1}{\ln a} = \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ כי ... ולכן $\ln a = \lim_{x\to0}\frac{x}{\log_a(1+x)}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{\ln 2}{3}\cdot\ln 4 = \frac{\ln 2\cdot 2\ln 2}{3} = \frac{2}{3}(\ln 2)^2$$

20