

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תש"פ
 חדו"א להנדסה 1 (9711-1-201) - מבחן מסכם - מועד א'
 המרצים: נעה איידלשטיין, אבי גורן, תם מאירוביץ, נינה צ'רניבסקי, אירנה לרמן, יונה מייזל
 וארקדי ליידרמן.

תאריך: 29 בינואר 2020

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: אסור שימוש בחומר עזר כלשהו. אין להשתמש במחשבון.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 100. עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. בשאלות הפתוחות, יש להסביר בעברית בצורה תמציתית וברורה מה אתם עושים ומדוע. יש לכתוב את התשובות במקום המיועד לכך בלבד. ייתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים. בשאלות "סגורות", תשובה סופית נכונה ללא נימוק או הסבר תזכה במלוא הנקודות. ניקוד חלקי עשוי להינתן עבור הדרך, במידה והתשובה הסופית שגויה אך סופק הסבר נכון וברור עבור הדרך, בדף המתאים בלבד. במידה ונרשמו חישובים או נימוקים שאינם נכונים - עלולים לאבד ניקוד גם במידה והתשובה הסופית נכונה. אם בסעיף מסויים המקום המקום אינו מספיק, ניתן להשתמש בדף הריק שבסוף המבחן. במקרה זה יש לציין באופן ברור במקום המיועד לתשובה שיש המשך לפיתרון והיכן, וכן לציין בדף הנוסף לאיזה סעיף או סעיפים מתייחס המשך התשובה.

שימו לב: דפי הטיוטא לא יבדקו וישלחו למגרסה.

בהצלחה!

1. (20 נק') נגדיר:

$$f(x) = x^{\cos(x)}.$$

משוואת הישר המשיק לפונקציה f בנקודה π היא:

$$y = -\pi^{-2}(x - \pi) + \pi^{-1} \quad (\text{א})$$

$$y = (\cos(\pi) - 1)\pi(x - \pi) + \pi^{\cos(\pi)} \quad (\text{ב})$$

$$y = \ln(\pi)\pi^{-1}(1 + \sin(\pi))\pi(x - \pi) + \pi^{\cos(\pi)} \quad (\text{ג})$$

$$y = \ln(\pi)\pi^{-1}(1 + \sin(\pi))\pi(x - \pi) - \pi^{\cos(\pi)} \quad (\text{ד})$$

$$y - y_0 = y'(x - x_0)$$

20

מחזוריות הנגזרת

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. (i) (10 נק') אילו מבין הטענות הבאות נכונות? (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

- (א) אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ קיים וסופי אזי הפונקציה f גזירה ב- a .
- (ב) אם f רציפה ב- a אזי f גזירה ב- a .
- (ג) אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים וסופי אזי f גזירה ב- a .
- (ד) אם f גזירה ב- a אזי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

כל f רציפה כל x רציפה,
 כל f גזירה בנק' סופי ושלם
 כל f גזירה בנק'.

התשובות הנכונות:

א, ג

10/10

קטן!

(iii) (10 נק') נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

סמנו אילו מהטענות הבאות הנכונות. (ייתכן שיותר מטענה אחת נכונה)

- (א) הפונקציה f מונוטונית עולה במובן החזק בתחום הגדרתה.
- (ב) הפונקציה f מונוטונית עולה במובן החלש בתחום הגדרתה, אבל לא במובן החזק.
- (ג) הפונקציה f קמורה כלפי מעלה ("מחייכת") בתחום הגדרתה.
- (ד) הפונקציה f קמורה כלפי מטה ("עצובה") בתחום הגדרתה.

התשובות הנכונות: א

$$f'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$0 = 6x + 6$$

$$x = -1$$



לפני $x = -1$:

קמורה \cap $f(x)$

אחרי $x = -1$:

קמורה \cup $f(x)$

אם הפונקציה f קמורה כלפי מעלה, אזי $f'(x) > 0$ לכל x בתחום הגדרתה.

אם הפונקציה f קמורה כלפי מטה, אזי $f'(x) < 0$ לכל x בתחום הגדרתה.

אם הפונקציה f קמורה כלפי מעלה, אזי $f''(x) > 0$ לכל x בתחום הגדרתה.

אם הפונקציה f קמורה כלפי מטה, אזי $f''(x) < 0$ לכל x בתחום הגדרתה.

אם הפונקציה f קמורה כלפי מעלה, אזי $f''(x) > 0$ לכל x בתחום הגדרתה.

3. (20 נק') מהו ערכו של האינטגרל המסויים הבא:

$$\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

תשובה:

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}$$

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt{4-(-x)^2} = x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} = f(x)$$

↓

פונקציה זוגית, קטע סימטרי $[-2, 2]$

פס:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^2 f(x) dx = 2 \cdot \pi$$

0 (א)

π (ב)

2π (ג)

4π (ד)

פ

20/20

4. הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה ע"י הנוסחה הבאה:

$$f(x) = \frac{1}{|x|+1} + \frac{1}{|x-2|+1}$$

(א) (14 נק') מצאו את כל נקודות הקיצון המקומיות והגלובליות של f .

פתרון:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-2)+1} & , x \geq 2 \\ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(2-x)+1} & , 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(2-x)+1} & , 0 > x \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0 \quad : x \geq 2$$

($x \neq -1, 1 \rightarrow$ נקודות קיצון)

$x \geq 2$ אין נקודות קיצון של $f(x)$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} \quad : 0 \leq x < 2$$

($x \neq -1, 3 \rightarrow$ נקודות קיצון)

~~אין נקודות קיצון~~

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} > 0 \quad : x < 0$$

($x \neq 1, 3 \rightarrow$ נקודות קיצון)

$x < 0$ אין נקודות קיצון של $f(x)$

(ב) (6 נק') ציירו סקיצה של הגרף של הפונקציה f .

$$0 = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(3-x)^2}$$

$$\frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

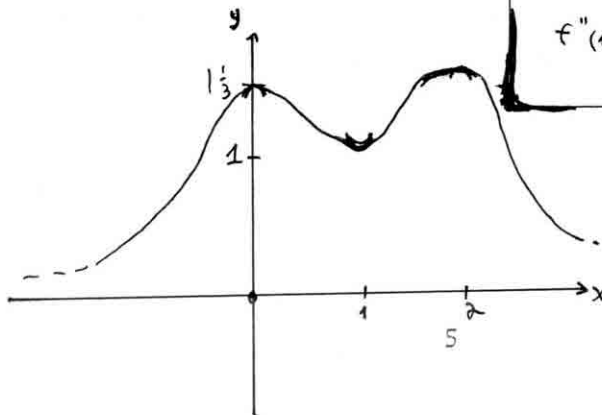
$$x = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{(3-x)^3}$$

$0 < x < 2$

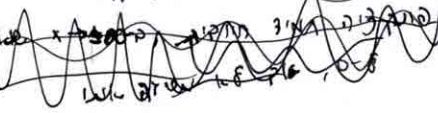
$$f''(1) = 1 + 8 > 0 \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark$$

נק' מינימום



06/06
מקור

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$



\cdot נקודת מקסימום - $(2, \frac{1}{3})$
 \cdot נקודת מינימום - $(1, 1)$
 \cdot נקודת מקסימום - $(0, \frac{1}{3})$
 * הפונקציה f שטוחה ב-0, 1, 2
 * הפונקציה f שטוחה ב-1, 3
 * נקודות קיצון - $(1, 1)$

5. (א) (10 נק') נסחו את המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי ואינטגרלי.

נניח שפונקציה $f(x)$ היא פונקציה ~~רציפה~~ ^{רציפה} ויש לה פונקציה אינטגרלית $F(x)$ ויש לה פונקציה אינטגרלית $F(x)$ ויש לה פונקציה אינטגרלית $F(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{:s.l.c}$$

10

(ב) (10 נק') רשמו את פולינום טיילור מסדר 2 סביב $a = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ של הפונקציה

$$F(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^x \cos(t^2) dt.$$

(אם בתשובה מופיעים קבועים כגון $e, \pi, \sqrt{2}$ מומלץ לרשום אותם בצורה זו ולא לרשום קירוב עשרוני)

$$F\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} \cos(t^2) dt = 0 \quad \checkmark$$

$$F'(x) = \cos(x^2) \cdot 1 = \cos(x^2), \quad F'\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

↓
 עפי' משקנה המשפט
 'טור' של \cos

$$F''(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x, \quad F''\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = -2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{6}} \quad \checkmark$$

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2$$

$$P\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} (x - \sqrt{\frac{\pi}{6}}) - \frac{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}{2} (x - \sqrt{\frac{\pi}{6}})^2 \quad \checkmark$$

10