ציון: 115

מבחן מועד א בפונקציות מרוכבות להנדסת חשמל

201.1.0071

סמסטר ב', שנה"ה תש"ף

תאריך: 05.08.2020

מרצים: א. גורן, א. פוליאקובסקי, י. שטראוס, ד. קרנר

משך הבחינה הוא שלוש שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים.

הבחינה מותרת לפרסום.

נקוד: סה"כ 115 נקודות.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (10 נקודות) הוכיחו/הפריכו: אם $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ אינה פונקציה זוגית אז היא לא חסומה.

טענה נכונה – הוכחה: דרך 1 –

נניח כי $f\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ איננה פונ' זוגית ונניח בשלילה כי f חסומה ונראה כי אז f חייבת להיות זוגית.

אם $f\in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ובנוסף חסומה $\Leftarrow$ ע"פ ליוביל f קבועה ולכן f בפרט זוגית, אבל הנחנו ש- f איננה זוגית

לכן סתירה $\Leftarrow$ אם f שלמה והיא איננה זוגית אזי בהכרח היא לא חסומה. **סיכום:**

כלומר יש 2 אפשרויות בהינתן ש- f שלמה ולא זוגית:

או שהיא חסומה או שלא:

אם נניח כי היא חסומה $\Leftarrow$ f זוגית וזאת סתירה להנחה ש- f לא זוגית

לכן f לא חסומה. ∎

10

אפשר להוכיח בעוד דרך (לא חובה לבדוק)

דרך ב – וידוע שעבור פונקציות שלמות, אם ∞ הוא קוטב או סליקה אזי f פולינום או קבוע, קבוע הוא פונ' זוגית

אך נניח כי f פולינום אך לא חסום

לכן בהכרח ∞ נק' עיקרית. אבל ע"פ משפט פיקארד

זה אומר שניתן להתקרב לכל ערך ב- $\mathbb{C}$ למעט אחד עם קבוצת הערכים של f ב- ∞

לכן ניתן למצוא סדרה $z_n\to\infty$ $|z_n|\to\infty$

כך ש- $|f(z_n)|\to\infty$ ובפרט f תהיה לא חסומה.

(האפשרויות ל- ∞ הן רק סינגולריות מבודדות כי f שלמה ולכן אנליטית בסביבת ∞)

(2) (10 נקודות) מצאו את $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ שמקיימת $f(0)=3$ ו

$$Im(f(z)) = 3(Re(z))^2 Im(z) - (Im(z))^3 + 7\,Re(z).$$

$f = u + iv$

$z = x + iy$

$$V = 3x^2y - y^3 + 7x$$

נשתמש בקושי רימן. f שלמה לכן v,u דיפרנציאביליות ב-R ומקיימות

סדר הפעולות:

$$\boxed{\left(V \xrightarrow[(\frac{\partial}{\partial y})]{} V_y \xrightarrow[(=)]{} u_x \xrightarrow[(\int dx)]{} u \xrightarrow[(\frac{\partial}{\partial y})]{} u_y \underset{(=)}{\longleftrightarrow} -V_x \right)} \quad \begin{cases} u_x = V_y \\ u_y = -V_x \end{cases}$$

$$V_y = 3x^2 - 3y^2 = u_x$$

$$u = \int u_x dx = \int 3x^2 - 3y^2 dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - 3y^2x + C(y)$$

$$= x^3 - 3y^2x + C(y)$$

$$u_y = -3\cdot 2y \cdot x + C'(y) = -6xy + C'(y)$$

$$V_x = 6xy + 7$$

$u_y = -V_x$

$$\cancel{-6xy} + C'(y) = \cancel{-6xy} - 7$$

$$C'(y) = -7$$

$$C(y) = -7y + A$$

לא תלוי ב-x או ב-y

$\frac{10}{10}$

$$u = x^3 - 3y^2x - 7y + A$$

$$f = u + iv = x^3 - 3y^2x - 7y + A + i(3x^2y - y^3 + 7x)$$

$$3 = f(0) = A \Rightarrow f = \underbrace{x^3 - 3y^2x - 7y + 3}_{u} + i\underbrace{(3x^2y - y^3 + 7x)}_{V}$$

$x=0$
$y=0$

f אכן שלמה כי u,v דיפ' ב-R ובנוסף בניתי אותם כך שיקיימו את משוואות קושי רימן בכל נקודה.

(3) (15 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(Ball_1(0))$. נניח ש $f\left(\frac{i}{2^n}\right) = \frac{1}{4^n - 2^n i}$ לכל $n = 1, 2, \ldots$. האם הטור $\sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^n$ מתכנס בהחלט?

$f \in \mathcal{O}(B_1(0))$ $\quad f\left(\frac{i}{2^n}\right) = \frac{1}{4^n - 2^n i}$. נשים לב כי

$z_n = \frac{i}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ כי $|z_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ובנוסף ש-

$\left(|z_n| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$

$f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

כי:

$$\left|\frac{1}{4^n - 2^n i}\right| \underset{\text{אש"מ}}{\leq} \frac{1}{\left|\,|4^n| - |2^n i|\,\right|} \underset{1 = n \text{ כי}}{=} \frac{1}{4^n - 2^n} = \frac{1}{2^n(2^n - 1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\left(|4^n - 2^n i| \geq \left|\,|4^n| - |2^n i|\,\right|\right)$

$B_1(0)$ קשורה מסילתית.

נשים לב $\rightarrow$ $$\frac{1}{4^n - 2^n i} = \frac{\frac{i}{2^n}}{\frac{i}{2^n}(4^n - 2^n i)} = \frac{\frac{i}{2^n}}{i(2)^n + 1} = \frac{\left(\frac{i}{2^n}\right)^2}{\frac{i}{2^n}\left(i(2)^n + 1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{i}{2^n}\right)^2}{\frac{i}{2^n} - 1}$$

$g(z) = \frac{z^2}{z - 1} \leftarrow g(z)$ נגדיר פונ'

$$g\left(\frac{i}{2^n}\right) = \frac{\left(\frac{i}{2^n}\right)^2}{\frac{i}{2^n} - 1} \underset{\text{הכפל את שני האגפים}}{=} \frac{i^2}{2^n i - (2^n)^2} = \frac{-1}{2^n i - 4^n} = \frac{1}{4^n - 2^n i}$$

ונשים לב

ובנוסף $g \in \mathcal{O}(B_1(0))$ כמנת אנליטיות כאשר המכנה לא מתאפס בתחום.

ומתקיים $f(z_n) = g(z_n)$ ובנוסף z_n בעלת נק' הצטברות

ב- $B_1(0)$ $\Leftarrow$ עפ"י עקרון היחידות (שהוכחתי את תנאי קיומו עד

עכשיו) $f(z) = g(z)$ ב- $B_1(0)$ ולכן $\left(\frac{1}{3} \in B_1(0)\right)$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-3}{18} = \frac{-1}{6}$$

המשך בעמוד הבא

נתבונן בטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n\left(f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3)^n\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{(-1)^n\left(\frac{1}{6}\right)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

זהו טור גאומטרי חיובי ולכן מתכנס בהחלט וסכומו הוא

שווה לטור הערכים המוחלטים

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\frac{15}{15}$

(4) (20 נקודות) עבור $b > a > 0$ חשבו את האינטגרל $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$.

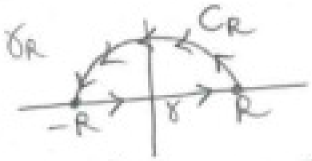
$a>b>0$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx \overset{\text{פונ' זוגית}}{=} \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\,dx}_{*}$$

נשים לב -

נסמן -

$$\mathrm{Im}\left(\frac{xe^{i2x}}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\right) = \frac{x}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\sin(2x)$$



ונבחר תחום $f(z) = \dfrac{ze^{i2z}}{(z^2+b^2)(z^2+a^2)}$

נשים לב שהסינגולריות של f בחצי מישור העליון הן

לכן

$z^2+b^2=0$ ובדומה $(a,b>0)$

$\underline{z=+ia}$ $\quad$ $\underline{z=+ib}$

$$2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,ia)+\mathrm{Res}(f,ib)\right] \overset{\uparrow}{=} \int_{\gamma_R} f\,dz = \int_{\gamma} f\,dz + \int_{C_R} f\,dz$$

משפט השארית של קושי f רגולרית על γ_R החל מ-R מספיק גדול ויש לה מס' סופי של סינגולריות בפנים והן מבודדות

$$\int_{\gamma} f\,dz \overset{\uparrow}{=} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \quad \boxed{\text{הגבול שנרצה לחשב}} \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$\gamma(x)=x$
$x\in[-R,R]$

נשים לב שהאינטגרל מהצורה של:

$$\int_{C_R} f\,dz = \int_{C_R} \underbrace{\frac{z}{(z^2+b^2)(z^2+a^2)}}_{g(z)} e^{2iz}\,dz \qquad \int g(z)e^{iaz}\,dz$$

חצי קשת עליונה

$\underline{z = a>0}$

רק ש-

$$\max_{C_R} |g(z)| = \max_{|z|=R}\left|\frac{z}{(z^2+b^2)(z^2+a^2)}\right| \le$$

משולש שני

$$\le \frac{R}{(R^2-b^2)(R^2-a^2)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

לכן ע"פ הלמה של ג'ורדן אורך השונו מההרצאות ובשבה

$$\int_{C_R} f\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

עבור שאריות

$$\mathrm{Res}(f,ia) \overset{\uparrow}{=} \lim_{z\to ia} \frac{ze^{2iz}\cancel{(z-ia)}}{(z+ib)(z-ib)(z+ia)\cancel{(z-ia)}} \overset{\uparrow}{=} \frac{\cancel{i}a e^{-2a}}{i^2(a+b)(a-b)(2\cancel{i}\cancel{a})} \;\textcircled{=}^{*}$$

מרגונים

נזהו קוטב פשוט הסיבה לכך הוא שהמונה לא מתאפס וסדר הקוטב הוא 1

$$\textcircled{=}^{*} \frac{e^{-2a}}{2(a+b)(b-a)}$$

נזכר להבין כי הגבול סומטרי השארית ב- ib הוגוב

$$\lim_{z\to ib} \frac{ze^{2iz}\cancel{(z-ib)}}{(z+ib)\cancel{(z-ib)}(z+ia)(z-ai)} = \frac{ibe^{-2b}}{(2ib)(ib+ia)(ib-ia)} =$$

$$= \frac{e^{-2b}}{2i(b+a)(i)(b-a)} = \frac{e^{-2b}}{2(a+b)(a-b)}$$

ממשיך

(נשתמש בסימטריה כי הגבולות קיימים – I מתכנס כי: $\left|\frac{x\sin(2x)}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\right| \le \left|\frac{x}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\right|$

$$\int_{\gamma_R} f\,dz = \int_{\gamma} f\,dz + \int_{C_R} f\,dz$$

$$R \to \infty$$

$$\frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}(a+b)(b-a)}\left[e^{-2a}-e^{-2b}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i2x}}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\,dx + 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right] = \int_{0}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{2(a+b)(b-a)}\left[e^{-2a}-e^{-2b}\right]$$

//

20/20

(5) (20 נקודות) תהי $f(z)=e^{z^2}$, נגדיר $c=\sup\limits_{z\in Ball_1(0)}|f(z)|$. האם למערכת המשוואות $\begin{cases} x+cy=0 \\ cx+e^2y=0 \end{cases}$ קיים פתרון יחיד?

נעבור לכתיב מטריצי –

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & c\\ c & e^2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$

$$\det\begin{pmatrix}1 & c\\ c & e^2\end{pmatrix} = e^2-c^2 \underset{\text{עבור פתרון יחיד}}{\neq} 0 \Rightarrow e^2\neq c^2$$

בשביל פתרון יחיד: $c\neq \pm e$

נבדוק

$f(z)=e^{z^2}\in \mathcal{O}(B_1(0))$ ובכלל שלמה.

לכן עפ"י עק' המקסימום c ב-$B_1(0)$ מתקבל על שפת כדור היחידה (כי f לא קבועה ובנוסף כי יודעים מוווקטוס שהיה מקסימום ב- $\overline{B_1(0)}$):

(ה-sup יתקבל על השפה והוא הערך המקס' של f על השפה)

$$\sup_{z\in B_1(0)}|f(z)| = \max_{|z|=1}|e^{z^2}|$$

$|e^{z^2}|$ תקבל מקסימום מתי ש-$|z^2|$ יקבל מקסימום על מעגל היחידה. טעות

$$\max_{|z|=1}|z^2| = 1 \Rightarrow c=e$$ (הבקשה לבדוק בשנית את הדרך הייתה מעולה)

נשים לב כי $c=e$ ולכן det של המערכת שווה 0 ולכן והוא יותר מפתרון יחיד כלומר אינסוף פתרונות:

$$\begin{pmatrix}1 & e\\ e & e^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}e & e^2\\ e & e^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}e & e^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ואכן המטריצה לא הפיכה.

לבדוק הבקשה !תודה!

הכי יותר מעולה

נכון הטענה כי ש- המקסימום של $|e^{z^2}|$ על $\partial B_1(0)$ הוא $\boxed{e}$:

$$|e^{z^2}| = |e^{x^2-y^2+2ixy}| = e^{x^2-y^2} = e^{2x^2-1}$$

$(x^2+y^2=1)$ $y^2=1-x^2$

נגדיר $g(x)=e^{2x^2-1}$, $x\in[-1,1]$

20/20

e^{2x^2-1} מונוטונית עולה לכן תקבל מקסימום כש- $2x^2-1$ תקבל מקסימום. $h(x)=2x^2-1$

$h'(x)=4x=0 \Rightarrow x=0$, $h''(x)=4 \Rightarrow x=0$ is min:

נבדוק ב- $x=1$ וב- $x=-1$: $\underset{x=\pm1}{h(x)}=1$ ולכן 1 הוא ה-מקסימום המוחלט של h

ולכן המקסימום של g הוא e^1 ✓

(6) (20 נקודות) חשבו $\int\limits_{3x^2+2y^2=1} e^{z^2}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)dz$ (כאן $z=x+iy$).

ננתח את המסילה - $3x^2+2y^2=1$, ב- $x=0$ יש חיתוכים עם $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

וב- $y=0$ יש חיתוכים עם $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, בנוסף

$$2y^2=1-3x^2$$

$$y^2=\frac{1-3x^2}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}$$

נסתכל על $\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}$ זוהי פונקציה זוגית ב- x , מקבלת $\sqrt{\frac{1}{2}}$ וב- $y=0$

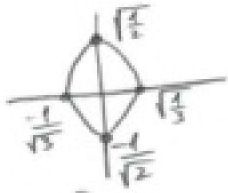
חותכת ב- $\sqrt{\frac{1}{3}}$, ובנוסף מוגדרת עבור $1-3x^2>0 \Leftrightarrow 3x^2<1$

ננתח ניתוח דומה עבור $-\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}$ וסך הכל

$$x^2<\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

נצור סכמטית את התחום



$\boxed{\text{נוסף כי } e^{z^2} \text{ אנליטית כהרכבת אנליטיות}}$

נשים לב שהסינגולריות של הפונקציה מתקבלות רק בנקודה $\underline{\underline{z=0}}$ עבור $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$, ע"פ משפט השאריות של קושי נוכל להמיר את האינטגרל לחישוב שארית -

(המשפט מתקיים כי f אנליטית פרט למס' סופי בתחום פנימי תחום שהגבול שלו הוא עקום ומחשבים אינטגרל על השפה)

$$2\pi i\left[Res\left(e^{z^2}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right),0\right)\right]$$

נשים לב כי הנק' הוא עיקרית ל- e^{z^2} יש סליקה (הוא אנליטית ב-0) ול- $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ יש עיקרית ולכן הוכחנו ש- $\lim\limits_{z\to 0} e^{z^2}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ לא קיים.

נפתח טור לורן ב- 0 של הפונקציות -

הוכחה מאמת הטור

$$e^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}, \quad \sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z)^{4n+2}}$$

נכפול $\underline{\underline{\text{אבל}}}$ נחפש רק את המקדם של $\frac{1}{z}$:

$$\left(1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\frac{z^8}{4!}+\dots\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^{10}}+\dots\right)$$

נשים לב שסה"כ הכפלה לא תורמת ל- $\frac{1}{z}$ ולכן $C_{-1}=0$ בנוסף אם

יכולתי לראות את זה מכך ש- $f(z)$ היא פונקציה זוגית

והוכחנו בתרגול בית שמפני שהחזקות בטור לורן זוגיות השארית בסינגולריות מבודדת הרוסה היא 0

$$\Leftarrow \quad 0=2\pi i Res(f,0)=\int\limits_{3x^2+2y^2=1} e^{z^2}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)dz$$

$z_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

הוכחה שהגבול ס-0 לא קיים

$$\lim_{n\to\infty} e^{z_n^2}\sin\left(\frac{1}{z_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{\pi n}} \sin\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2}\right) = 0$$

נבחר עוד $\to$ $w_n = \frac{1}{\sqrt{i\pi n}}$

מתקיים
לא שנה
משנה
(סין

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^{w_n^2} \sin\left(\frac{1}{w_n^2}\right)\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{e^{\frac{1}{i\pi n}}}_{\text{חסומה שסופה ל-1}} \underbrace{\sin(i\pi n)}_{\text{פונק' לא חסומה}} \right| \longrightarrow \infty$$

$$\sin(i\pi n) = \frac{e^{-\pi n} - e^{\pi n}}{2i}$$

לא נחוץ, אבל אחלה תוספת

לכן הגבול לא קיים.

יפה!

$\frac{20}{20}$

(7) (20 נקודות) נניח שפונקציה $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת $|f(z)| \le 4(1+\sqrt{|z|})$ ב $\mathbb{C}$.
האם f בהכרח קבועה?

של טור טיילור שלה

f שלמה, נשתמש בהצגה האינטגרלית של קושי, נחשב מקדמים ב-$z=0$:

לכן ניתן לפתח לה טור טיילור בכל נק' בפרט ב- 0 כי היא אנליטית בכל נק'

$$|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \le$$

למת הערכה

R כלשהו (מהשלמות $0<R<\infty$)

$$\le \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \max_{|z|=R}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \cdot \underbrace{\cancel{2\pi} R}_{\text{אורך המסילה}} \le$$

חסם נתון בכל $\mathbb{C}$, $|z|=R^{+}$

$$\le \frac{R}{R^{n+1}}\cdot 4(1+\sqrt{R}) = \frac{4(1+\sqrt{R})}{R^n}$$

נשים לב שלכל $n \ge 1$ נקבל ש-

$$\frac{4(1+\sqrt{R})}{R^n} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

הדבר נכון לכל $0<R<\infty$ ולכן אם בגבול

מותר להציב תחליף גבולי כי זה נכון לכל R (לפי הצגה) f שלמה אינט' של קושי ($|z|=R$) מותר לבחור (כי f אנליטית בכל כדור) ובנוסף ניתן לנמק את זה ע"י משפט קושי גרסה 1, המדגן שאם יש תחום פשוט, חסם שהשפה שלו היא עקום ו-f אנליטית בו ורציפה על השפה אזי $\oint_{\partial\Omega} f\,dz = 0$ לכן קיבלנו

$$0 \le |a_n| \le M(R) \quad , \forall n \ge 1$$

$R\to\infty$: $0 \le 0 \le 0$, $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n \ge 1$

לפי סנדוויץ'

לכן נשים לב - $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 \Rightarrow f = Const$, כאשר $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

לפי מה שהוכחתי

תודה על הבדיקה

20/20

יפה מאוד!