



האגודה הסטודנטאלית
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

באדיבות מדור אקדמיה, אגודת הסטודנטים, אוניברסיטת בן גוריון.
www.bgu4u.co.il

קומבינטוריקה – תורת הגרפים

סיכום הגדרות, משפטים וטענות

מתיה כץ - סמסטר ב' – 2020

מסכם : יונתן נפתלי

בסיס

הגדרה - גרף: V היא קבוצה סופית לא ריקה, E היא קבוצת זוגות איברים שונים מ- V . הזוג $G = (V, E)$ נקרא גרף:

- גרף לא מכוון אם E היא קבוצת זוגות לא סדורים.
 - גרף מכוון אם E קבוצת זוגות סדורים.
 - גרף פשוט אם אין בו קשתות עצמיות. כלומר אין צלעות בין קודקוד לעצמו (לולאות).
- איברי V נקראים קודקודים/צמתים, נסמנים ב- $|V| = n$ ואיברי E נקראות צלעות/קשתות, נסמן ב- $|E| = m$.

הגדרה – שכנים: בגרף לא מכוון שני קודקודים $u, v \in V$ הם שכנים אם קיימת צלע שמחברת ביניהן. כלומר אם $\{u, v\} \in E$. נסמן ב- \sqrt{u} את קבוצת השכנים של u , כאשר $\sqrt{u} = \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$.

הגדרה – דרגת קודקוד:

- בגרף לא מכוון, דרגת קודקוד u היא מס' השכנים שלו, כלומר $\deg(u) = |\sqrt{u}|$.
- בגרף מכוון דרגת הכניסה של u היא מספר הצלעות הנכנסות אל u , ודרגת היציאה של u היא מספר הצלעות היוצאות מ- u .

הגדרה – מסלול בגרף:

- מסלול בגרף:
 - בגרף לא מכוון, הינו סדרה של קודקודים (v_1, v_2, \dots, v_p) , כך ש- $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ לכל $0 \leq i \leq p-1$, והצלעות $\{v_0, v_1\} \dots \{v_{p-1}, v_p\}$ שונות זו מזו.
 - בגרף מכוון, הינו סדרה של קודקודים (v_0, v_1, \dots, v_n) כך ש- $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ לכל $0 \leq i \leq p-1$.
- מסלול פשוט הוא מסלול שבו כל קודקוד מופיע לכל היותר פעם אחת.
- מעגל פשוט הוא מעגל שבו כל קודקוד, פרט לראשון/אחרון, מופיע לכל היותר פעם אחת.
- אורך המסלול הוא כמספר הצלעות במסלול, כלומר P .

- המרחק בין u, v הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם, ומסומן $d(u, v)$. אם אין מסלול בין u, v אז נגדיר $d(u, v) = \infty$.
- קוטר הגרף הינו המרחק המקסימלי בין זוג קודקודים בגרף, ומסומן $diam(g)$.

טענה – תכונות פונקציית המרחק $d(u, v)$:

1. רפלקסיביות: $d(u, v) \geq 0$ ו- $d(u, v) = 0$ אם רק אם $v = u$.
2. סימטריות: $d(u, v) = d(v, u)$.
3. טרנזיטיביות: $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (אין שוויון המשולש).

הגדרה – קשירות: גרף לא מכוון הוא קשיר אם יש מסלול בין כל זוג קודקודים בגרף. גרף מכוון הוא קשיר היטב אם לכל שני קודקודים u, v יש מסלול מ- u ל- v וגם מ- v ל- u .

הגדרה – רכיב קשירות: נגדיר יחס שקילות על זוגות קודקודים, כך ששני קודקודים עומדים ביחס אם קיים מסלול ביניהם. מחלקות השקילות של יחס השקילות נקראות רכיב שקילות. נבחין, כי בגרף קשיר יש רכיב שקילות אחד.

משפט הדרגות:

- בגרף לא מכוון מתקיים $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
- ישנו מס' זוגי של קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית בגרף.

טענה: בגרף עם n קודקודים ו- m צלעות יש לפחות $n - m$ רכיבי שקילות.

טענה: בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים יש לפחות $n - 1$ צלעות.

טעויות נפוצות בנושא קשירות:

- אם בגרף יש לפחות $n - 1$ צלעות – אינו בהכרח קשיר!
- גרף שבו דרגת כל קודקוד היא חיובית – אינו בהכרח קשיר!
- גרף שבו אין קודקודים מבודדים – אינו בהכרח קשיר!

טענה: בגרף עם $n \geq 3$ קודקודים ו- $m \geq n$ צלעות יש מעגל.

טענה: $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר, ו- $e \in E$. הגרף $G \setminus \{e\}$ קשיר אם ורק אם e שייכת למעגל פשוט ב- G .

הגדרה – גרף שלם: K_n הוא גרף שלם עם n קודקודים, המכיל את כל הצלעות האפשריות בין n הקודקודים האלו. מספר הצלעות בגרף שלם הוא $\binom{n}{2}$ וכן הקוטר של הגרף הוא 1, כיוון שקיימת צלע בין כל זוג קודקודים. נקרא גם קליקה מסדר n .

הגדרה – קבוצת קודקודים בלתי תלויה: קבוצת קודקודים תקרא בלתי תלויה, אם לכל זוג קודקודים בקבוצה לא קיימת צלע שמחברת ביניהם. ניתן לאמר על קבוצת קודקודים בלתי תלויה שהיא מקסימלית, בכוונה שלא ניתן להוסיף אליה עוד קודקודים כך שתישאר בלתי תלויה.

הגדרה – גרף מעגל: מעגל על n קודקודים המסומן C_n , מס' הצלעות = קוטר = $\frac{n}{2}$.

הגדרה – גרף מסלול: מסלול על n קודקודים המסומן P_n , מס' הצלעות = קוטר = $n - 1$.

הגדרה – גרף קובייה n -ממדית: גרף המסומן Q_n שקבוצת הקודקודים שלו היא אוסף כל הסדרות באורך n של אפסים ואחדים, ויש צלע בין שני קודקודים אם ורק אם הסדרות המתאימות נבדלות זו מזו בקואורדינטה אחת בלבד. בעל התכונות הבאות:

- מס הקודקודים הוא 2^n (מספר הסדרות הבינאריות).
- מספר הצלעות הוא $n * 2^{n-1} = \frac{n * 2^n}{2}$ (דרגת כל קודקוד היא n וסכום הדרגות שווה לפעמיים סכום הצלעות).
- קוטר הגרף הוא n , כיוון שכל פעם 'מתקנים' ביט אחד. למשל:

$$(0,0,0,0) \rightarrow (1,0,0,0) \rightarrow (1,1,0,0) \rightarrow (1,1,1,0) \rightarrow (1,1,1,1)$$

הגדרה – גרף רגולרי: גרף נקרא d -רגולרי עם דרגת כל קודקוד בגרף היא d . מספר הצלעות בגרף d -רגולרי הוא $\frac{dn}{2}$ (= סכום הדרגות חלקי 2).

הגדרה – תת גרף: לגרף $G = (V, E)$ נאמר כי $G' = (V', E')$ הוא תת-גרף של G אם $E' \subseteq E$ וכן $V' \subseteq V$. מקרים פרטיים של תת-גרפים:

- G' נקרא תת גרף פורש אם $V' = V$.
- G' נקרא תת גרף מושרה אם לכל $u, v \in V'$ כך ש- $\{u, v\} \in E$ מתקיים שגם $\{u, v\} \in E'$.

הגדרה – גרף דו-חלקי: גרף $G = (V, E)$ יקרא דו-חלקי אם ניתן לחלק את V לשתי קבוצות זרות V_1 ו- V_2 , כך שכל אחת מהן בלתי תלויה, ושלכל $\{x, y\} \in E$ מתקיים כי $x \in V_1$ ו- $y \in V_2$ או $x \in V_2$ ו- $y \in V_1$. כלומר, כל צלע מחברת קודקוד מקבוצה אחת לשנייה, ולא מחברת בין קודקודים בתוך הקבוצה. נסמן גרף דו-חלקי $G = (V_1, V_2, E)$.

הגדרה – גרף דו-חלקי שלם: גרף דו-חלקי יקרא שלם, אם קיימות כל הצלעות בין V_1 ו- V_2 .

משפט: בגרף דו-חלקי שלם K_{st} מספר הצלעות הוא $s * t$.

טענה: בגרף דו-חלקי רגולרי $G = (V_1, V_2, E)$ מתקיים $|V_1| = |V_2|$.

משפט – אפיון לגרפים דו-חלקיים: גרף הינו דו-חלקי אם ורק אם כל המעגלים שבו מאורך זוגי.

עצים

הגדרות:

- יער – גרף לא מכוון חסר מעגלים.
- עץ – יער קשיר \leftarrow גרף לא מכוון, קשיר וחסר מעגלים – הוא עץ.
- עלה – קודקוד בעץ שדרגתו 1 נקרא עלה.
- עץ עם שורש – עץ שבו יש קודקוד אחד מיוחד שנקרא שורש העץ. נתבונן במסלול כלשהוא מהשורש עד לקודקוד u כלשהו בעץ.:
- אב קדמון וצאצא – כל קודקוד לאורך מסלול זה, למעט u , נקרא אב קדמון של u , ו- u נקרא הצאצא של כל קודקוד כזה.
- הורה וילד – הקודקוד המופיע במסלול מיד לפני u נקרא ההורה/האבא של u , ו- u נקרא הילד/הבן שלו. השורש הוא הקודקוד היחיד ללא הורה.
- גובה העץ – המסלול הארוך ביותר מהשורש לעלה.
- דרגת קודקוד – מספר הילדים שלו (בשונה מגרף, הצלע אל ההורה אינה נספרת, לכן דרגת קודקוד עץ תהיה פחות אחד מהדרגה של הקודקוד בגרף).
- רמת קודקוד – מרחק הקודקוד מהשורש, עומקו.

סוגי עצים:

- עץ בינארי: דרגת כל קודקוד ≥ 2 .
- עץ בינארי מלא: דרגת כל קודקוד שאינה עלה, בדיוק 2.
- עץ בינארי שלם: כל העלים באותה רמה, דרגת כל הקודקודים הפנימיים היא 2.

טענה: הגובה של עץ בינארי שלם עם n קודקודים הוא $d = (\log_2 n + 1) - 1$.

תכונות חשובות של עצים: לכל עץ יש עלה, ובין כל זוג קודקודים יש מסלול יחיד בעץ.

משפט: כל עץ עם $n \geq 2$ קודקודים מכיל עלה.

משפט: מספר הצלעות בעץ עם n קודקודים הוא $n-1$.

טענה: גרף הוא עץ אם ורק אם:

- הגרף קשיר ומינימלי בתכונה זו (כלומר, השמטת צלע מהגרף תיצור גרף לא קשיר).
- הגרף חסר מעגלים ומקסימלי בתכונה זו (כלומר, הוספת צלע לגרף תיצור מעגל).

טענה: גרף קשיר עם n קודקודים ו- $n-1$ צלעות, הוא עץ.

הגדרה – עץ פורש: עץ פורש בגרף $G = (V, E)$, הוא תת גרף פורש של G , והוא עץ. לא יתכן כמה.

משפט: גרף קשיר אם ורק אם יש לו עץ פורש.

הגדרה - עץ k -י:

- עבור עץ בינארי – דרגת כל קודקוד $k \geq 2$.
- עבור עץ בינארי מלא – דרגת כל קודקוד, שאינו עלה, בדיוק k .
- עבור עץ בינארי שלם – כל העלים באותה רמה (כלומר, באותו עומק, אותו מרחק מהשורש), ודרגת כל הקודקודים הפנימיים היא בדיוק k .

טענה: מספר הקודקודים הפנימיים בעץ k -י שלם שגבוהו d הוא $\frac{k^d - 1}{k - 1}$ ומספר הקודקודים הכולל הוא

$$\frac{k^{d+1} - 1}{k - 1}. \text{ מספר הקודקודים ברמה ה-} i \text{ הוא } k^i.$$

גרפים מישוריים

הגדרה – גרף מישורי: גרף נקרא מישורי אם ניתן לייצג אותו במישור כך שכל קודקוד של הגרף מתאים לנקודה במישור, כל צלע למסילה מישורית פשוטה, ואין שתי מסילות שנחתכות. בגרף מישורי ישנו אובייקט נוסף לצד הצלעות והקודקודים – פאות; כל אזור במישור שתחום ע"י צלעות נקרא פאה. האזור מחוץ לציור הוא הפאה האינסופית/החיצונית.

משפט – נוסחת אוילר: יהי גרף מישורי וקשיר, אזי
$$\underbrace{n}_{\text{קודקודים}} + \underbrace{f}_{\text{פאות}} - \underbrace{m}_{\text{צלעות}} = 2$$

משפט: יהי גרף מישורי וקשיר עם $n \geq 3$ קודקודים ו- m צלעות, אזי $m \leq 3(n - 2)$. אם גרף אינו קשיר, אי-השוויון תקף לכל רכיב קשירות של עצמו.

יתקיים שוויון (כלומר $m = 3(n - 2)$), אם ורק אם הגרף הוא שילוש מלא – משמע כל הפאות בגודל 3, כלומר כל פאה מורכבת מ-3 צלעות.

טעות נפוצה: אם לגרף יש לכל היותר $3n - 6$ צלעות, אין זה אומר שהגרף מישורי.

טענה: בגרף דו-חלקי לא ייתכנו מעגלים אי-זוגיים, ולכן גודל כל פאה הוא לפחות 4.

הגדרה – מינור: H הוא מינור של גרף G אם H יכול להתקבל מ- G ע"י מחיקת קודקודים וצלעות וכיווץ צלעות ב- G . פעולת הכיווץ של צלע מאחדת את שני הקודקודים שהיא מחברת ביניהם.

טענה: K_5 ו- $K_{3,3}$ אינם גרפים מישוריים.

משפט הפאות: יהי גרף מישורי עם $|F|$ פאות, אזי $|F| \leq 2|E|$, $\sum_{f \in F} |\{e \in E \mid e \in f\}| \leq 2|E|$ - כלומר, כל צלע נוגעת לכל היותר ב-2 פאות, וכל פאה נוגעת לכל הפחות ב-3 צלעות.

יתקיים שוויון (כלומר $\sum_{f \in F} |\{e \in E \mid e \in f\}| = 2|E|$), כאשר כל צלע חלה בבדיקת 2 פאות.

משפט: בגרף מישורי חסר משולשים עם $n \geq 3$ קודקודים יש לכל היותר $2n - 4$ צלעות.

משפט Wagner: גרף מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל כמינור את הגרפים K_5 וגם את $K_{3,3}$.

אבחנה: אם G מישורי אז גם $G \setminus \{e\}$ מישורי.

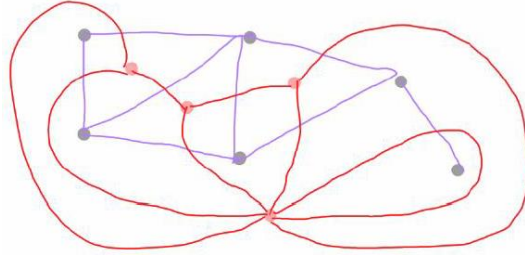
משפט: בכל גרף מישורי יש קודקוד שדרגתו ≥ 5 .

הערה: בהינתן גרף, עליו נשאלת השאלה האם מישורי או לא, עלינו להבין מה גורם לו להיות לא מישורי והאם ניתן לתקן זאת. אחרת, אם לא ניתן לתקן, עלינו למצוא K_5 או $K_{3,3}$ כמינור כדי להוכיח שאינו מישורי.

הגדרה – הגרף הדואלי של גרף מישורי: יהי G גרף מישורי, נסמן ב- G^* את הגרף הדואלי שלו - זהו מולטי-גרף (כלומר, בין אותם קודקודים עשויה לחבר יותר מצלע אחת). קודקודיו הן פאות G , ולכל צלע שב- G מוגדרת צלע e^* המחברת בין הפאות ש- e שייכת להן. נבחין כי:

- $|V^*| = |F|$ - כלומר, מספר הפאות בגרף המישורי = מספר הקודקודים בגרף הדואלי.

- $|E^*| = |E|$ - כלומר, מספר הצלעות בגרף המישורי = מספר הצלעות בגרף הדואלי.



צביעת גרפים

הגדרה - צביעה: $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, k שלם וחיובי. נאמר כי G הוא k -צביע אם קיימת פונקציה

$f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ המקיימת כי לכל $x, y \in V$ אם $\{x, y\} \in E$ אז $f(x) \neq f(y)$. זאת, כאשר $f(x)$ הוא הצבע של קודקוד x בצביעה f . (כלומר, שני קודקודים יצבעו באותו הצבע אם ורק אם לא קיימת קשת ביניהם).

הגדרה – מספר צביעה: $X(G)$ הינו ה- k המינימלי עבורו G הוא k -צביע.

אבחנה: גרף דו-חלקי הוא 2-צביע.

אבחנה: נתבונן בצביעה חוקית כלשהי של גרף G ב- k צבעים. ניתן לאמר כי קבוצת הקודקודים שנצבעה בצבע ה- i היא בלתי תלויה. זאת, כיוון שלא קיימות קשתות ביניהם.

משפט – ארבעה הצבעים: כל גרף מישורי הוא 4-צביע.

משפט: יהי גרף לא מכוון. אזי $X(G) \leq r + 1$, כאשר $r = \max_{v \in V} (\deg(v))$.

משפט Brooks: יהי G גרף קשיר שהדרגה המקסימלית בו היא r - אזי, $X(G) \leq r$. זאת, למעט המקרים הבאים:

- $r = 2$ והגרף כולו הוא מעגל באורך אי-זוגי \leftarrow אז נקבל כי $X(G) = 3$.
- הגרף הוא גרף מלא על $r + 1$ קודקודים \leftarrow אז נקבל כי $X(G) = r + 1$.

מסלולים בגרפים

הגדרה – מסלול אוילר: מסלול (לא בהכרח פשוט) שמבקר בדיוק פעם אחת בכל צלע.

הגדרה – מעגל אוילר: מעגל (לא בהכרח פשוט) שמבקר בדיוק פעם אחת בכל צלע.

טענה – קיום אוילר: יהי גרף קשיר:

- אם הגרף לא מכוון:
 - יש בגרף מסלול אוילר אם ורק אם מספר הקודקודים שדרגתם אי-זוגית היא בדיוק 2.
 - יש בגרף מעגל אוילר אם ורק אם דרגת כל קודקוד בגרף זוגית.
- אם הגרף מכוון, יש בגרף מעגל אוילר אם ורק אם דרגת הכניסה = דרגת היציאה לכל קודקוד בגרף.

טענה: יהי גרף לא מכוון, כך שדרגת כל קודקודיו זוגית. אזי, כל קודקוד שדרגתו גדולה ממש מ-0 שייך לאיזשהו מעגל בגרף.

הגדרה – מסלול המילטון: מסלול פשוט שמבקר בדיוק פעם אחת בכל קודקוד.

הגדרה – מעגל המילטון: מעגל פשוט שמבקר בדיוק פעם אחת בכל קודקוד.

משפטי קיום מעגל המילטון:

- **משפט Dirac:** אם לכל $x \in V$ מתקיים $\deg(x) \geq \frac{n}{2}$, אז הגרף מכיל מעגל המילטון.
- **משפט Ore:** יהי גרף עם $n \geq 3$ קודקודים. אם $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ לכל $x, y \in V$ שאינם שכנים, אז הגרף מכיל מעגל המילטון.

טענה: בגרף הקובייה Q_n יש מעגל המילטון. הוא יתקבל ע"י חיבור שני מסלולי המילטון ב- Q_{n-1} .

בעיות קיצון בגרפים

בעיית רמזי: $R = R(s, t)$ הוא המספר הטבעי המינימלי כך שבכל צביעה של צלעות הגרף K_R בשני צבעים (אדום וכחול), קיים תת-גרף שלם K_s שצבוע בכחול או שקיים תת-גרף שלם K_t שצבוע באדום.

ניסוח שקול: עבור גרף עם לפחות $R = R(s, t)$ קודקודים, מתקיים אחד מהבאים:

- בגרף יש קליקה בגודל s .
- בגרף יש אנטי-קליקה בגודל t (או – בגרף המשלים יש קליקה של t).

טענה: $R_{3,3} = 6, R_{4,3} = R_{3,4} = 9, R_{4,4} = 18$.

משפט Erdos-Szekeres: $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$. כלומר, אם R הוא מספר טבעי המקיים $R \geq \binom{s+t-2}{s-1}$, וצובעים את צלעות K_R בשני צבעים – אז בגרף הצבוע מובטח כי נמצא K_s בצבע אחד או K_t בצבע שני.

בעיית Turan: יהיו n, t מספרים שלמים חיוביים כך ש- $t \leq n$. הבעיה – מהו המספר המינימלי

$m = m(n, t)$ (כפונקציה של n ו- t), כך שבכל גרף עם n קודקודים ו- m צלעות יש K_t . כלומר, מהו המספר המינימלי של צלעות שהגרף צריך להכיל כדי שבוודאות נמצא בו קליקה מגודל t .

משפט Mantel: יהי גרף בעל n קודקודים חסר משולשים, אזי בגרף יש לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ צלעות. כלומר בגרף בעל n קודקודים ו- $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$ צלעות, בטוח יש משולש.

משפט Turan: יהי גרף בעל n קודקודים, שבו הקליקה הגדולה ביותר היא K_r , אזי בגרף יש לכל היותר

$$\frac{r}{r+1} * \frac{n^2}{2} \text{ צלעות.}$$

זיווגים בגרפים

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. זיווג ב- G הוא אוסף של צלעות $M \subseteq E$, כך שאין בו שתי צלעות עם קודקוד משותף. סוגי זיווגים:

- זיווג מושלם: אם כל קודקודי הגרף משתתפים בזיווג, כלומר $|M| = \frac{n}{2}$.
- זיווג מקסימלי: אם לא ניתן להגדיל את הזיווג.
- זיווג מקסימום: אם מבין כל זיווגי הגרף, זהו הזיווג הגדול ביותר.

משפט Hall (משפט החתונה): בגרף דו-חלקי $G = (V_1, V_2, E)$ בו $|V_1| = |V_2|$, יש זיווג מושלם אם ורק

אם מתקיים כי לכל תת-קבוצה $S \subseteq V_1$ $|S| \leq |\sqrt{S}|$. כלומר אם עבור כל תת קבוצה של קודקודים מתקיים כי מספר השכנים של כל קודקודי קבוצה S גדול/שווה ממספר הקודקודים בקבוצה.

טענה: יהי גרף דו-חלקי $G = (V_1, V_2, E)$ d -רגולרי, אזי בגרף יש זיווג מושלם.

הגדרה – מסלול הרחבה: יהי M זיווג בגרף ויהי $P = (x_1, \dots, x_k)$ מסלול פשוט בגרף. נאמר ש- P הוא מסלול הרחבה לזיווג M אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הקודקודים הראשון והאחרון במסלול, x_1, x_k , לא מכוסים ע"י M .
2. $\{x_1, x_2\} \notin M, \{x_2, x_3\} \in M, \dots, \{x_{k-1}, x_k\} \notin M$ (מכך נובע כי k בהכרח זוגי).

מסלול הרחבה P מאפשר לנו לעבור מזיווג M לזיווג גדול יותר:

$$M' = M \setminus \{\{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \dots\} \cup \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}\}$$

(מחליפים את כל הצלעות ששייכות ל- M בכל הצלעות שלא שייכות ל- M , ובכך מריווחים עוד צלע)

אם קיים מסלול הרחבה, משמע שניתן להגדיל את הזיווג בדיוק בצלע אחת - $|M'| = |M| + 1$.

משפט: יהי גרף ו- M זיווג בגרף. אזי, יש בגרף זיווג נוסף, N , כך ש- $|N| < |M|$, אם ורק אם יש מסלול הרחבה ל- M .

עצים מתויגים

הגדרה: עץ מתויג הוא עץ בעל n קודקודים, שבו כל קודקוד מקבל "שם". שני עצים מתויגים יהיו שונים זה מזה אם קבוצת הצלעות שלהם שונה.

טענה: תהי d_1, d_2, \dots, d_n סדרה של n מספרים שלמים. יש עץ מתויג עם n קודקודים שסדרת הדרגות שלו היא d_1, d_2, \dots, d_n אם ומי"מ $1 \leq i \leq n, d_i \geq 1$ וגם $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.

משפט – Cayley: מספר העצים המתויגים על n קודקודים הוא n^{n-2} .

קוד פרופר:

לוקח עץ מתויג עם n קודקודים ומתאים לו סדרת מספרים $X = \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) | 1 \leq a_i \leq n\}$.

- **בניית קוד עבור עץ קיים:** בכל שלב נסיר את העלה עם האינדקס הנמוך ביותר ונכתוב בקוד את המספר של השכן היחיד שלו. נעצור כאשר יישארו בגרף 2 קודקודים, כלומר אורך הקוד הוא $n-2$.
- **שחזור עץ מקוד:** עבור קוד באורך x , משמע שסדרת הקודקודים היא $\{1, 2, \dots, x+2\}$, כאשר $x+2 = n$. לכן, לאורך הריצה נתחזק שתי מחסניות:

○ סדרת הקודקודים - $\{1, 2, \dots, n\}$

○ הקוד

בכל שלב, נוציא את האיבר המינימלי ממחסנית סדרת הקודקודים שלא מופיע במופיע במחסנית הקוד וכן את האיבר הראשון במחסנית הקוד – קיבלנו שני קודקודים, נחבר אותם בצלע. בשלב האחרון, יישארו שני קודקודים במחסנית סדרת הקודקודים בעוד שמחסנית הקוד תהיה ריקה – נחבר שני קודקודים אלו בצלע – וסיימנו.

בעץ שסדרת הדרגות שלו היא (d_1, d_2, \dots, d_n) , המספר i מופיע $d_i - 1$ פעמים בקוד פרופר של העץ. לכן, אם קודקוד v הוא עלה, הוא לא יופיע בקוד פרופר של העץ.

מסקנה: ישנם $\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$ עצים מתויגים שסדרת הדרגות שלהם היא (d_1, d_2, \dots, d_n) .

הערה: אחד מתוך שני הקודקודים שנותרים לאחר יצירת קוד פרופר של עץ T הוא הקודקוד שמספרו n .