מספר קורס: 201.1.9511
מרצה: יוסי שטראוס
מתרגל:
יוצר המסמך: רותם שטל

האגודה הסטודנטיאלית
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

סוג החומר: סיכום הרצאות

שם הקורס: אלגברה לינארית 1 להנדסת חשמל

2020

באדיבות מדור אקדמיה, אגודת הסטודנטים, אוניברסיטת בן גוריון.
www.bgu4u.co.il

<u>אלגברה ליניארית שיעור 1</u>

יוסי שטראוס

strauss@bgu.ac.il

yossef.strauss@gmail.com

שעות קבלה: רביעי, 12-14:00 בניין 58 חדר 120- (מרתף) או 109- (משרד)

אתר הקורס במערכת המודל

תרגיל שבועי ובחנים

בוחן אמצע 6/12

<u>לוגיקה מתמטית</u>

<u>פסוק לוגי</u>: הצהרה בעלת ערך אמת או שקר בלבד.

דוגמא: היום יום ראשון – האפשרויות הן כן / לא (T/F).

<u>משתנה לוגי</u>: משתנה המקבל ערך T או F בלבד.

<u>קשרים לוגיים:</u>

קשר "או" – יסומן $\vee$

יהי P ו Q שני משתנים לוגיים. טבלת האמת של $P \vee Q$ היא:

P	**Q**	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

קשר "וגם" – יסומן $\wedge$

אם Pו Q משתנים לוגיים אז טבלת האמת של $P \wedge Q$ היא

P	**Q**	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

קשר שלילה יסומן $\neg$

אם P הוא משתנה לוגי אז טבלת האמת של קשר שלילה היא

P	$\neg P$
F	T
T	F

הקשרים הנ"ל מספיקים כדי לבטא כל פסוק לוגי

אנו מגדירים גם קשרים מורכבים יותר לדוגמא קשר גרירה

יסומן $\Rightarrow$

טבלת האמת היא

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	T

T	T	F
F	F	T
T	T	T

אם ההנחה לא מתקיימת (P=f) אז הגרירה מוגדרת כנכונה כי התנאי לא מתקיים.

הגרירה ⇒שקולה לוגית לפסוק הבא:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q$$

<u>חוקי ד'מורגן :</u>

חוקי שלילה

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

<u>חוקי "פילוג"</u>

$$\mathrm{P} \wedge (Q \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

<u>סתירה לוגית</u>

$$P \wedge (\neg P) \equiv F$$

<u>טאטולוגיה:</u>$P \vee \neg P \equiv T$

<u>כמתיים לוגיים:</u>

כמת "לכל" מסומן ∀ למשל$(\forall x: P(x) \equiv T)$

כאן ההצהרה היא : לכל איבר X בקבוצה המתאימה הפסוק הלוגי P(x) הוא אמת

כמת "קיים" מסומן ∃ למשל $(\exists x: P(x) \equiv F)$

- שלילה של פסוקים לוגיים המכילים כמתים למשל:
  X, Y ממשיים

$$\neg\big(\exists x(\forall y < x: x + y > 0)\big) \equiv \forall x(\exists y < x: x + y \leq 0)$$

קבוצות:

מושג הקבוצה הוא מושג יסוד שאינו ניתן להגדרה באמצעות מושגים יסודיים יותר.

הקבוצות מסומנות בדרך כלל באותיות אנגלית גדולות ...A,B,C

איברים בקבוצות מסומנים בדרך כלל באותיות קטנות ...x, y, z

האמירה x הוא איבר ב A מסומנת ב:

$$x \in A$$

אם איבר x אינו שייך לA נסמן $x \notin A$

קבוצות קטנות המכילות מספר אברים קטן וסופי מגדירים בדרך כלל על ידי סימון ישיר של אברי הקבוצה. למשל

$$A = \{1,2,3,A\}$$

אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה.

אם מספרים האיברים בקבוצה הוא גדול או אפילו אינסופי, נוכל להגדיר קבוצה ע"י כלל המשייך איברים לקבוצה. למשל

$$A = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$$

בכל דיון העוסק בקבוצות A, B, C ... נניח קיומה של קבוצה אוניברסאלית U שאיברי A, B, C וכו' לקוחים ממנה.

הקבוצה הריקה מסומנת ב $\emptyset$

נאמר ש A היא תת קבוצה של B ונסמן $A \subseteq B$ אם כל איבר בA הוא גם איבר בB .

למשל:

$$A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} = B$$

נאמר שA אינה מוכלת בB ונסמן $A \nsubseteq B$

אם קיים <u>לפחות</u> איבר אחד בA שאינו איבר של B.

תכונות מיידיות של יחס ההכלה:

1. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$
2. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B$
3. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

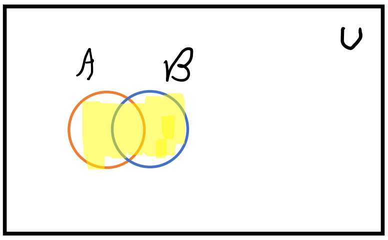
נאמר ש A מוכלת ממש ב B ונסמן $A \subset B$ אם $A \subseteq B$ וקיים לפחות איבר אחד בB שאינו איבר של A.

<u>פעולות בקבוצות</u>

איחוד: האיחוד של קבוצות A וB מסומן ב $A \cup B$ ומוגדר להיות:

$$A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

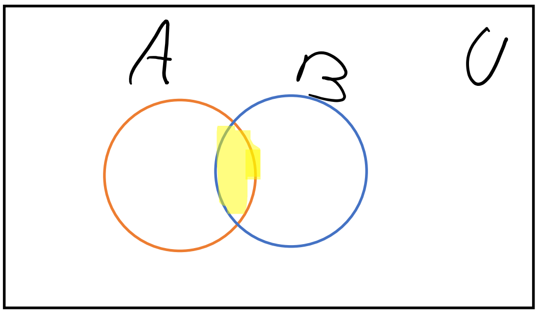
דיאגרמת וון של איחוד קבוצות היא



חיתוך: החיתוך של A וB מסומן ב $A \cap B$ ומוגדר על ידי:

$$A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

דיאגרמת וון המתאימה היא

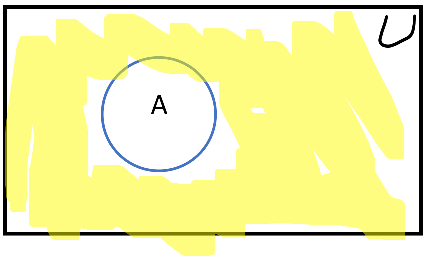


השלמה: תהי U קבוצה אוניברסאלית ותהי A תת קבוצה של U . הקבוצה המשלימה של A בU מסומנת $A' A^c \bar{A}$

ומוגדרת

$$A^C = \{x: (x \in U) \wedge (x \notin A)\}$$

דיאגרמת וון



חיסור: החיסור של A מB מסומן $B \setminus A$ ומוגדר על ידי :

$$B \setminus A = \{x: x \in B \cap A^c\}$$

חיסור סימטרי – החיסור הסימטרי של A ו B מסומן ב $A\Delta B$ ומוגדר להיות:

$$A\Delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$$

כללי ד'מוגן:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

חוקי "פילוג":

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

<u>פונקציות:</u>

הגדרה (פונקציה):

פונקציה כוללת שתי קבוצות A ו B וכלל המשייך לכל איבר $x \in A$ איבר יחיד ב B . פונקציה (f) מA לB מסומנת ב $f: A \to B$. הקבוצה Aנקראת התחום (Domain) של F וB נקראת הטווח של F (Range) .

התמונה של F מסומנת ב Image (f) (ולפעמים מקצרים ל Im(f))ומוגדרת על ידי

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in B : \exists x \in A, y = f(x)\}$$

למשל:

$$f: R \to R$$

$$f(x) = X^2$$

התחום של F הוא R , הטווח של F הוא R. התמונה של F היא

$$Im(f) = \{y \in R : y \geq 0\}$$

פונקציה $f: A \to B$ נקראת "על" אם Image(f) = B

פונקציה $f: A \to B$ נקראת חד-חד ערכית (חח"ע) אם $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

דוגמא: בדוגמא הקודמת

$$f: R \to R$$

$$f(x) = X^2$$

F אינה על וגם לא חח"ע. ראינו כבר ש F אינה על. בנוסף , אם למשל

$$y = 1 \in \mathrm{Im}(f)$$

אזי ערכי X המתאימים הם

$$X = \pm 1$$

נוכל לשנות את F לפונקציה חח"ע ועל ע"י ההגדרה

$$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$$

$$f(x) = X^2$$

Retem.S

אלגברה ליניארית שיעור 2

הוכחה בדרך השלילה:

בדרך זו אנו מניחים את נכונותה של השלילה של הטענה אותה אנו רוצים להוכיח. ע"י שימוש בהנחה זו אנו מגיעים לסתירה לוגית ומכאן אנו מסיקים את נכונות הטענה.

דוגמא:

נוכיח בשלילה ש $\sqrt{2}$ הוא מספר כי רציונלי

הוכחה:

נניח **בשלילה** ש $\sqrt{2}$ הוא רציונאלי, כלומר קיימים מספרים טבעיים q ו p כך ש $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$

והשבר $\frac{p}{q}$ הוא מצומצם לגמרי.

מההנחה הנ"ל נקבל ש $\sqrt{2}=\frac{p}{q}\Rightarrow p^2=2q^2\Rightarrow$

P זוגי , $p=2k, k\in\mathbb{N}$

מכאן נקבל ש

$p^2=4k^2=2q^2\Rightarrow q^2=2k^2\Rightarrow$

q זוגי

$\Rightarrow q=2m, m\in\mathbb{N}$

מכאן השבר $\frac{p}{q}=\frac{2k}{2m}$ אינו מצומצם לגמרי. הגענו לסתירה לוגית ועל כן הטענה אינה נכונה ו $\sqrt{2}$ אי רציונאלי.

שדות

מכפלה קרטזית (הגדרה):

המכפלה הקרטזית של קבוצות A וB (לא ריקות) תסומן ב$A\times B$ ותוגדר להיות קבוצת כל הזוגות הסדורים $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$

זה לא באמת פעולת כפל, זה פעולת התאמה – איבר מהקבוצה הראשונה לאיבר מהקבוצה השניה. יש חשיבות לסדר הקבוצות.

הרחבה:

יהיו A; $1\le i\le m$ קבוצות לא ריקות. המכפלה הקרטזית $A_1\times A_2\times...\times A_m$ מוגדרת להיות קבוצת הm-יות הסדורות

$$A_1\times A_2\times...\times A_m=\{(a_1,a_2,a_3,...,a_m):a_1\in A_1,a_2\in A_2,...,a_m\in A_m\}$$

דוגמא:

נמצא את המכפלה הקטרזית $A\times B$ של $\begin{array}{l}A=\{a,b,c\}\\B=\{1,2\}\end{array}$

פתרון:

מתקיים

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

- אם מספר האיברים בA הוא m ומספר האיברים ב B הוא n אזי מספר האיברים ב$A\times B$ הוא mn.

<u>שדה (הגדרה):</u>

שדה הוא שלישיה $(F,+,*)$ כאשר F קבוצה לא ריקה

$\begin{array}{l}+:F\times F\to F\\ *:F\times F\to F\end{array}$ הן פעולות בינאריות המקיימות:

1) $\begin{array}{l}\forall x,y\in F\\ x+y=y+x\end{array}$ חילופיות לחיבור=קומוטטיביות לחיבור
2) $\begin{array}{l}\forall x,y,z\in F\\ (x+y)+z=x+(y+z)\end{array}$ אסוסציטיביות
3) קיים איבר $0_F\in F$ הנקרא האיבר הנטרלי לחיבור (אפס) המקיים: $\forall x\in F, x+0=x$
4) לכל איבר $x\in F$ קיים איבר $(-x)\in F$ כך ש $x+(-x)=0$
5) $\forall x,y\in F, x*y=y*x$ חילופיות ביחס לכפל
6) $\forall x,y,z\in F,(x*y)*z=x*(y*z)$ אסוסציטיביות ביחס לכפל
7) קיים איבר $1_F\in F$ הנקרא האיבר הנטרלי ביחס לכפל כך ש $\forall x\in F, x*1=x$

8) לכל $\begin{matrix} x \in F \\ x \neq 0 \end{matrix}$ קיים איבר $x^{-1} \in F$ כך ש $x^{-1} * x = 1$

x^{-1} נקרא האיבר ההופכי ל x

9) $\begin{matrix} \forall x, y, z \in F \\ x*(y+z) = x*y + x*z \end{matrix}$ חוק הפילוג.

<u>דוגמאות:</u>

1. תהי $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ קבוצת המספרים הטבעיים. ויהיו + ו * החיבור והכפל הסטנדרטיים.

השלישייה $\mathbb{N}$, *,+, אינה שדה , למשל לא קיים איבר נטרלי בחיבור.

2. תהי $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...\}$ קבוצת המספרים השלמים. ויהיו + ו * החיבור והכפל הסטנדרטיים.

השלישיה $\mathbb{Z}$, +, * אינה שדה, לא קיים איבר הופכי בכפל.

3. תהי $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\}$ קבוצת המספרים הרציונליים. ויהיו + ו * החיבור והכפל הסטנדרטיים.

השלישיה $\mathbb{Q}$, +, * מהווה שדה ועל כן תקרא שדה המספרים הרציונאליים.

4. תהי $\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים, ו+ ו* החיבור והכפל הסטנדרטיים.

השלישיה $\mathbb{R}$, +, * מהווה שדה הנקרא שדה המספרים הממשיים.

<u>תת שדה (הגדרה):</u>

בהינתן שדה (F,+,*) תת קבוצה $F_1 \subset F$ תקרא תת שדה של (F,+,*) אם $(F_1$,+,*) מהווה שדה כאשר + ו * הן פעולות החיבור והכפל שהוגדרו על F.

דוגמא: ($\mathbb{Q}$,* ,+) היא תת שדה של ($\mathbb{R}$, * ,+)

5. על הקבוצה $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ נגדיר את הפעולות הבינאריות הבאות:

א. $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ב. $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

אזי השלישיה ($\mathbb{R}^2$, + , *) מהווה שדה. שדה זה נקרא שדה המספרים המרוכבים ומסומן ב $\mathbb{C}$.

האיבר הניטרלי לחיבור בשדה זה נקרא $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$

האיבר הניטרלי לכפל בשדה זה הוא $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$

נבדוק:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1_{\mathbb{C}} * (x, y) = (1,0) * (x.y) = (1 * x - 0 * y, 1 * y + 0 * x) = (x, y)$$

האיבר הנגדי לחיבור עבור $(x,y)\in\mathbb{C}$ הוא $(-x,-y)$

האיבר ההופכי ל $(x,y)\neq(0,0)$ הוא $(x,y)^{-1}=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$

נבדוק:

$$(x,y)^{-1}*(x,y)=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})*(x,y)=(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},0)=(1,0)=1_{\mathbb{C}}$$

ניתן לבדוק שהשלישייה ($\mathbb{R}$, + , *) כאשר $\mathbb{R}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ ו + , * הן הפעולות שהגדרנו, מהווה שדה. שדה זה מזוהה עם שדה המספרים הממשיים.

למשל , $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$

$(x,0)*(y,0)=(xy,0)$

לכן $\mathbb{R}$ הוא תת-שדה של $\mathbb{C}$.

נשים לב לכך ש $(0,1)*(0,1)=(-1,0)$ ונסמן $i=(0,1)$ ומהחישוב הנ"ל נקבל ש $i^2=-1$

בנוסף $(x,0)+(0,1)(y,0)=(x,0)+(0,y)=(x,y)=z\Rightarrow z=x+iy$

$(x,0)=x$

$(0,1)=iy$

שאלה:

נתונה השלישייה $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ כך ש

$\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים

$\forall a,b\in\mathbb{R}, a\oplus b:=a+b+1$

$\forall a,b\in\mathbb{R}, a\odot b:=ab+a+b$

בהינתן ש $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ היא שדה ונסמן F:

א. מהו האיבר הניטרלי לחיבור?
ב. מהו האיבר הניטרלי לכפל?
ג. מהו האיבר ההופכי (לכל איבר שונה מהאיבר הניטרלי לחיבור)
ד. הוכיחו במפורש את חוק הפילוג.

פתרון:

א. יהי $a\in\mathbb{R}$ שרירותי נסמן ב 0_F את האיבר הניטרלי לחיבור. אזי מתקיים:

$$a\oplus 0_F=a\Rightarrow a=a\oplus 0_F=a+0_F+1\Rightarrow 0_F=-1$$

ב. יהי $\begin{matrix} a\in\mathbb{R} \\ a\neq 0_F=-1\end{matrix}$ נסמן 1_F את האיבר הניטרלי לכפל. אזי מתקיים:

$$a\odot 1_F=a\Rightarrow a1_F+a+1_F=a\Rightarrow(a+1)1_F=0\Rightarrow 1_F=0$$

ג. עבור $a \neq 0_F = -1$ נרצה למצוא את $b = a^{-1}$. מתקיים:

$$a \odot a^{-1} = 1_F \Rightarrow a*b + a + b = 0 \Rightarrow (a+1)b + a = 0 \Rightarrow b = \frac{-a}{a+1}$$

לכן $a^{-1} = \frac{-a}{a+1}$

ד. עלינו להראות ש $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

נחשב את אגף שמאל:

$$a \odot (b \oplus c) = a(b \oplus c) + a + (b \oplus c) = a*(b+c+1) + a + (b+c+1) = ab + ac + a + a + b + c + 1$$

נחשב את אגף ימין:

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (a \odot b) + (a \odot c) + 1 = (ab + a + b) + (ac + a + c) + 1 = ab + ac + a + a + b + c + 1$$

קיבלנו שאגף ימין שווה לאגף שמאל.

<u>נוכיח מספר תכונות יסוד של שדות:</u>

יהי (F, +, *) שדה.

אזי:

1.
$$0_F * a = 0_F$$
$$\forall a \in F$$

נוכיח: מתקיים $0_F * a = (0_F + 0_F) * a = 0_F * a + 0_F * a$

נחבר לשני האגפים את האיבר הנגדי $-(0_F * a)$ ונקבל

$$\Rightarrow (-0_F * a) + 0_F * a = (-0_F * a) + (0_F * a + 0_F * a)$$
$$\Rightarrow 0_F = ((-0_F * a) + 0_F * a) + 0_F * a = 0_F + 0_F * a = 0_F * a$$

2.
$$\forall a \in F$$
$$(-1) * a = -a$$

נוכיח: מתקיים $(-1)*a + a = (-1)*a + 1*a = ((-1)+1)*a = 0 * (1-)$

$$\Rightarrow (-1) * a = -a$$

<u>מטריצות:</u>

מטריצה (הגדרה):

מטריצה A בגודל $n\times m$ מעל שדה F היא מערך מלבני של n שורות על m עמודות בעל איברים הלקוחים מהשדה F.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}\in F,$$

$$1\le i\le n,$$

$$1\le j\le m$$

את קבוצת כל המטריצות בגודל $n\times m$ מעל F נסמן $\mathrm{M}_{n\times m}(F)$

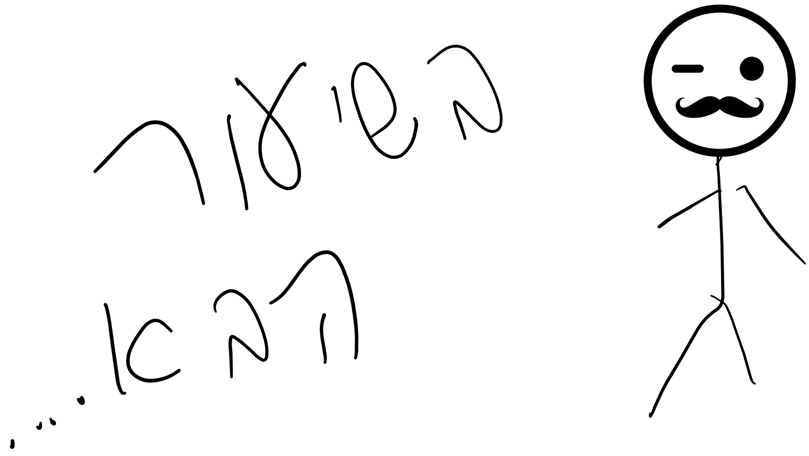
- יהי $A\in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$, $\alpha\in F$ המכפלה αA מוגדרת ע"י

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

- יהיו $A,B\in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$ הסכום A+B מוגדר ע"י

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

כפל מטריצות



אלגברה ליניארית שיעור 3

- מטריצה A מגודל $n\times m$ מעל שדה F היא מערך מלבני שנראה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij}\in F$$

$1\le i\le n$

$1\le j\le m$

קבוצת כל המטריצות מגודל $n\times m$ מעל שדה F מסומנת ב:

$M_{n\times m}(F)$

(אם n=m נסמן גם $M_n(F)$)

לעיתים אנו נסמן מטריצה A בעלת איברים a_{ij} גם ב $A=a_{ij}$

- נניח ש $A=a_{ij}$ היא מטריצה השייכת ל $M_{n\times m}(F)$ ו $\alpha\in F$

המכפלה αA מוגדרת ע"י
$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

- אם $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in M_{n\times m}(F)$ אזי הסכום $A+B$ מוגדר ע"י:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

הגדרה: כפל מטריצות:

תהי $A\in M_{n\times k}(F)$, $B\in M_{k\times m}(F)$

נניח ש ($\begin{matrix} A=(a_{ij}) \\ B=(b_{ij}) \end{matrix}$). אזי מתפלת המטריצות $A*B$ היא מטריצה מגודל $n\times m$ המוגדרת ע"י

$$(A*B)_{ij}=\sum_{r=1}^{k} a_{ik}b_{kj}$$

$1\le i\le n$

$1\le j\le m$

דוגמא:

נניח ש:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

אזי:

$$A*B=\begin{pmatrix}-3 & -8 & 11\\ 22 & -15 & 45\end{pmatrix}$$

במילים: סוכמים את ערך השורה הראשונה בA כפול כל איבר תואם בעמודה הראשונה בB וזה נכנס למשבצת הראשונה במטריצה החדשה. לאחר מכן סוכמים את ערך השורה הראשונה כפול כל איבר תואם בעמודה השניה בB ומכניסים למשבצת השניה, והלאה.

הערה – מטריצה שיש בה עמודה אחת בלבד נקראת וקטור עמודה

מטריצה שיש בה שורה אחת בלבד נקראת וקטור שורה

- נניח ש $A\in M_{n\times m}(F)$ ו $\vec{V}\in M_{m\times 1}(F)$ ($\vec{V}$ הוא וקטור עמודה באורך m)
  נסמן ב $\vec{C_1},\vec{C_2},\vec{C_3},...,\vec{C_m}\in M_{n\times 1}(F)$ את עמודותיה של המטריציה A, כלומר
  $$A=\left(\vec{C_1}\vdots\quad \vec{C_2}\vdots\quad \vec{C_3}\vdots\quad ...\vdots\vec{C_m}\right)$$
  ובנוסף נסמן
  $$\vec{V_1}=\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_m\end{pmatrix}$$
  אזי מתקיים
  $$A\vec{V}=\left(\vec{C_1}\vdots\quad \vec{C_2}\vdots\quad \vec{C_3}\vdots\quad ...\vdots\vec{C_m}\right)\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_m\end{pmatrix}=V_1\vec{C_1}+V_2\vec{C_2}+...+V_m\vec{C_m}$$
  דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$A\vec{V}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1*(-2)+(-3)*1+2(-1)\\ 4*(-2)+2*1+5*(-1)\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$$

- נניח ש $A\in M_{n\times m}(F)$ היא מטריצה שעמודותיה הן $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},\overrightarrow{C_3},...,\overrightarrow{C_m}\in M_{n\times 1}(F)$ ונניח ש $B\in M_{m\times k}(F)$, $B=(b_{ij})$ במקרה זה יתקיים:

$$A*B=\left(\overrightarrow{C_1}\vdots\ \ \overrightarrow{C_2}\vdots\ \ \overrightarrow{C_3}\vdots\ \ ...\vdots\overrightarrow{C_m}\right)\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mk}\end{pmatrix}=\left(b_{11}\overrightarrow{C_1}+b_{21}\overrightarrow{C_2}+...+b_{m1}\overrightarrow{C_m}\vdots\ \ ...\ \ b_{1k}\overrightarrow{C_1}+b_{2k}\overrightarrow{C_2}+...+b_{mk}\overrightarrow{C_m}\right)$$

מכאן נקבל שכל עמודה במכפלה $A*B$ היא סכום של העמודות של המטריצה A עם מקדמים מהעמודה המתאימה במטריצה B.

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A*B=\begin{pmatrix}(-1)*5+2*1 & (-1)*2+2(-3) & (-1)*1+2*6\\ 3*5+7*1 & 3*2+7*(-3) & 3*1+7*6\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}*5+\begin{pmatrix}2\\ 7\end{pmatrix}*1\vdots\ \ \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}*2+\begin{pmatrix}2\\ 7\end{pmatrix}*(-3)\vdots\ \ \begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}*1+\begin{pmatrix}2\\ 7\end{pmatrix}*6\right)$$

- יהיו $A\in M_{n\times k}(F)$, $B\in M_{k\times m}(F)$

נסמן את שורותיה של המטריצה B ב

$$\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...\overrightarrow{R_k}\in M_{1\times m}$$

אזי מתקיים:

$$A*B=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{R_1}\\ \overrightarrow{R_2}\\ \vdots\\ \overrightarrow{R_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}*\overrightarrow{R_1}+a_{12}\overrightarrow{R_2}+...+a_{1k}\overrightarrow{R_k}\\ \vdots\\ \vdots\\ a_{n1}\overrightarrow{R_1}+a_{n2}\overrightarrow{R_2}+...+a_{nk}\overrightarrow{R_k}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A*B=\begin{pmatrix}(-1)*5+2*1 & (-1)*2+2(-3) & (-1)*1+2*6\\ 3*5+7*1 & 3*2+7*(-3) & 3*1+7*6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)(5,2,1)+2(1,-3,6)\\ 3(5,2,1)+7(1,-3,6)\end{pmatrix}$$

<u>תכנות יסוד בכפל מטריצות:</u>

1. באופן כללי, כפל מטריצות הוא לא חילופי!!! $A*B\neq B*A$
2. כפל מטריצות הוא אסוסציטיבי $A*B*C=A*(B*C)=(A*B)*C$
3. כפל מטריצות הוא ליניארי $A*(\alpha B+\beta C)=\alpha A*B+\beta *A*C$

   $\alpha,\beta\in F$

<u>מערכות משוואות ליניאריות:</u>

מערכת משוואות ליניארית היא מערכת משוואות מהצורה:

$$n\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1m}X_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2m}X_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nm}X_m = b_n \end{cases}, a_{ij} \in F, b_i \in F$$

מערכת כזו נקראת מערכת ליניארית של n משוואות בm נעלמים. פתרון למערכת כזו הוא קבוצת ערכים $X_1 = a_1, X_2 = a_2, ..., X_m = a_m$

המקיימת את כל המשוואות במערכת.

- מטריצת המקדמים של המערכת מוגדרת להיות

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

וקטור הקבועים מוגדר להיות הוקטור $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

וקטור הנעלמים מוגדר להיות הוקטור $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

נשים לב שניתן לרשום את מערכת המשוואות הנ"ל בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow A\overrightarrow{X} = \vec{b}$$

- יהיו $L_1, ...L_n$ שורות המערכת הלינארית הנתונה

<u>הפעולות האלמנטריות המוגדרות על שורות המערכת הן:</u>

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ החלפת שורות
2. $\alpha \neq 0, \alpha L_i \to L_i$ כפל שורה בסקלאר
3. $i \neq j, \alpha L_j + L_i \to L_i$ הוספה לשורה כפולה של שורה אחרת

בהתאמה לפעולות הנ"ל אנו מגדירים פעולות שורה אלמנטריות במטריצות:

הגדרה: פעולות שורה אלמנטריות:

תהי $A\in M_{n\times m}(F)$. נסמן את שורותיה של A ב $\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_n}$

פעולות השורה האלמנטריות המוגדרות על A הן:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $\alpha\neq 0, \alpha R_i \to R_i$
3. $i\neq j, \alpha R_j + R_i \to R_i$

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 6 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 6 & 2\\ -2 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{3R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ -3 & 6 & 18 & 6\\ -2 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+2R_3\to R_1}\begin{pmatrix}-3 & 5 & 14 & 5\\ -3 & 6 & 18 & 6\\ -2 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}=B$$

- מטריצות A וB תקראנה <u>שקולות שורה</u> אם ניתן להגיע מ A לB (ולהיפך) ע"י ביצוע מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות.

- נשים לב לכך שלכל פעולת שורה אלמנטרית קיימת פעולת שורה הפוכה:

1. $e_1 : R_i \leftrightarrow R_j \Rightarrow e_1^{-1} : R_i \leftrightarrow R_j$
2. $e_2 : \alpha R_i \to R_i \Rightarrow e_2^{-1} : \frac{1}{\alpha} R_i \to R_i$
3. $e_3 : \alpha R_j + R_i \to R_i \Rightarrow e_3^{-1} : R_i - \alpha R_j \to R_i, i\neq j$

<u>**הגדרה: מטריצה מדורגת בדירוג שורות קנוני:**</u>

תהי $A\in M_{n\times m}(F)$. נאמר שA מדורגת בדירוג שורות קנוני אם:

1. כל שורות האפסים בA מצויות בתחתית המטריצה.

בכל שורה בA שאינה שורת אפסים האיבר הראשון משמאל שאינו אפס נקרא <u>האיבר המוביל.</u>

2. בכל שורה שאינה שורת אפסים האיבר המוביל מצוי מימין לאיבר המוביל בשורה הקודמת (למעט השורה הראשונה כמובן).

3. האיברים המובילים כולם שווים ל1 וכל איבר מוביל הוא היחיד בעמודה בה הוא נמצא השונה מאפס.

דוגמאות:

1. המטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ היא מטריצה מדורגת בדירוג שורות קנוני.

2. המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1&0&2&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}$ לא מדורגת בדירוג שורות קנוני.

משפט:

כל מטריצה $A\in M_{n\times m}(F)$ ניתן להביא לצורה קנונית יחידה על ידי ביצוע פעולות שורה אלמנטריות.

לכל מטריצה יש מטריצה קנונית אחת ויחידה שהיא שקולת השורה שלה.

- תהליך דירוג של מטריצה נתונה A לצורה קנונית נקרא תהליך גאוס-ג'ורדן.

דוגמא:

נביא את המטריצה הבאה לצורה קנונית:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-2&3\\3&4&5&2\\2&6&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+3R_1\to R_2]{R_3+2R_1\to R_3}\begin{pmatrix}-1&2&-2&3\\0&10&-1&11\\0&10&-6&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}-1&2&-2&3\\0&10&-1&11\\0&0&-5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{5R_1-R_2\to R_1}$$

$$\begin{pmatrix}-5&0&-9&4\\0&10&-1&11\\0&0&-5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[5R_2-R_3\to R_2]{5R_1-9R_2\to R_1}\begin{pmatrix}-25&0&0&38\\0&50&0&57\\0&0&-5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{-1}{5}R_3\to R_3]{\frac{-1}{25}R_1\to R_1,\ \frac{1}{50}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{-38}{25}\\0&1&0&\frac{57}{50}\\0&0&1&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

<u>אלגברה ליניארית שיעור 4</u>

תזכורת משיעור שעבר:

מערכת משוואות ליניארית

$$n\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & +a_{nm}x_m = b_n \end{pmatrix} \in F$$

המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

היא מטריצת המקדמים

הוקטור

$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ הוא וקטור הקבועים

הוקטור

$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ הוא וקטור הנעלמים.

ניתן לכתוב את המערכת בצורה $A\vec{X} = \vec{B}$

<u>מטריצה A נקראת מדורגת בדירות שורות קנוני אם:</u>

1. כל שורות האפסים נמצאות בתחתית המטריצה
2. בכל שורה שאינה שורת אפסים האיבר המוביל הוא 1
3. בכל שורה שאינה שורת אפסים האיבר המוביל נמצא מימין לאיבר המוביל בשורה הקודמת (למעט כמובן השורה הראשונה)
4. בכל עמודה שבה קיים איבר מוביל הוא האיבר המוביל היחיד השונה מאפס

- תהליך הדירוג של מטריצה נתונה לצורה קנונית נקרא תהליך גאוס-ג'ורדן
- לכל מטריצה נתונה A קיימת צורה קנונית יחידה

<u>פתרון מערכת משוואות ליניארית הומוגנית:</u>

- מערכת משוואות ליניארית $A\vec{X}=\vec{B}$ נקראת הומוגנית אם $\vec{B}=0$ כלומר, מערכת הומוגנית היא מהצורה $A\vec{X}=\vec{0}$.
- למערכת הומוגנית $A\vec{X}=\vec{0}$ תמיד קיים הפתרון $\vec{X}=\vec{0}$, פתרון זה נקרא <u>הפתרון הטריוויאלי.</u>

אלגוריתם לפתרון של מערכת משוואות ליניארית הומוגנית:

1) נרשום את מטריצת המקדמים A
2) מביאים את A לצורה קנונית A' ע"י פעולות שורה אלמנטריות
3) לכל עמודה במטריצה A (או A') מתאים נעלם (משתנה) x_1 , x_2 וכו'.
4) כל עמודה שאין בה איבר מוביל במטריצה A' מתאים משתנה חופשי. כל משתנה המתאים לעמודה עם איבר מוביל נקרא משתנה מוביל (או משתנה תלוי).
5) לכל משתנה חופשי מצמידים פרמטר r s, t, וכו' .
6) יש לפתור עבור המשתנים התלויים כפונקציה של הפרמטרים החופשיים ולרשום את פתרון המערכת.

דוגמא:

נפתור את המערכת ההומוגנית

$$-x_1-x_2+2x_3=0$$
$$x_1+2x_2-3x_3=0$$
$$x_1+x_2-2x_3=0$$

פתרון:

נרשום את מטריצת המקדמים:

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

נביא לצורה קנונית ע"י פעולות שורה אלמנטריות

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+R_1\to R_2]{R_3+R_1\to R_3}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\to R_1}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

המטריצה A' היא מטריצה קנונית.

נזהה משתנים תלויים וחופשיים:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$$

X_1 משתנה תלוי

X_2 משתנה תלוי

X_3 משתנה חופשי

נבצע פרמטריזציה

$$X_3 = t \in \mathbb{R}$$

נרשום את המערכת המתקבלת ונציב את הפרמטריזציה.

$$\begin{aligned} &X_1 - X_3 = 0 \\ &X_2 - X_3 = 0 \\ &\Downarrow \\ &X_1 = t \\ &X_2 = t \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

דוגמא 2:

נפתור את המערכת:

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + 5X_3 + 3X_4 &= 0 \\ -X_1 + 3X_2 - 4X_3 + X_4 &= 0 \end{aligned}$$

מטריצת המקדמים היא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

נביא לצורה קאנונית:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} = A'$$

כאן X_3 X_4 משתנים חופשיים, X_1 X_2 משתנים תלויים

נבצע פרמטריזציה $s,t\in\mathbb{R}, X_4=t, X_3=s$

נרשום את המערכת המתקבלת ונציב את הפרמטריזציה. אנו מקבלים

$$
\begin{aligned}
&X_1+7X_3+11X_4=0\\
&X_2+X_3+4X_4=0\\
&\Downarrow\\
&X_1=-7s-11t\\
&X_2=-s-4t
\end{aligned}
$$

ולבסוף:

$$\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7s-11t\\-s-4t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-7\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-11\\-4\\0\\1\end{pmatrix} s,t\in\mathbb{R}$$

<u>הערה:</u>

באופן עקרוני המשתנים החופשיים יכולים להופיע בכל עמודה במטריצה.

למשל

$$A'=\begin{pmatrix}0&1&-3&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\\X_1&X_2&X_3&X_4&X_5\end{pmatrix}$$

במערכת זו המשתנים החופשיים הם X_1, X_3, X_5

נבצע פרמטריזציה

$$X_1=r, X_3=s, X_5=t$$

ונקבל

$$X_2 - 3X_3 + \frac{1}{2}X_5 = 0$$
$$X_4 + 2X_5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 3s - \frac{1}{2}t \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s, t \in \mathbb{R}$$

- נשים לב לכך שאם נתונה מערכת הומוגנית של N משוואות בM נעלמים ו M>N אזי לכל הפחות קיימים M-N משתנים חופשיים.
- אם במערכת הומוגנית אין משתנים חופשיים בכלל אזי הפתרון היחיד למערכת הוא הפתרון הטריוויאלי.

<u>פתרון מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית:</u>

מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית היא מערכת מהצורה $\begin{matrix} A\vec{X} = \vec{B} \\ \vec{B} \neq \vec{0} \end{matrix}$

<u>אלגוריתם לפתרון מערכת משוואות ליניארית לא הומוגנית:</u>

1) בונים את המטריצה המורחבת של המערכת
$B = \left(A \vdots \vec{b}\right)$
2) מביאים את B לצורה קנונית B′
3) אם בצורה הקנונית B′ קיימת שורה מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \vdots & 1 \end{pmatrix}$
אזי המערכת אינה ניתנת לפתרון. שורה זו תקרא שורת סתירה.
אם במהלך תהליך הדירוג מתקבלת שורה מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \vdots & a \end{pmatrix}, a \neq 0$. אזי שורה זו נקראת שורת סתירה ואין פתרון למערכת.

4) במידה ואין שורות סתירה נזהה את המשתנים החופשיים ונבצע פרמטריזציה, נמשיך בפתרון בדומה לדירוג משוואה הומוגנית.

- אפשרויות הפתרון הן:
  1. אין פתרון (שורת סתירה)
  2. פתרון יחיד (אין משתנים חופשיים)
  3. אינסוף פתרונות (יש משתנים חופשיים) (הערה: מספר הפתרונות יהיה סופי אם השדה סופי)

דוגמא:

$$-X_1 - X_2 + 2X_3 = -1$$
$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = -4$$
$$X_1 + X_2 - 2X_3 = 1$$

נפתור את המערכת מעל $\mathbb{R}$

פתרון:

ראשית נרשום את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(A\vdots\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כאן X_3 משתנה חופשי. נבצע פרמטריזציה $X_3 = t$ ונקבל

$$X_1 = 6 + t$$
$$X_2 = -5 + t$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+t \\ -5+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא: נפתור את המערכת

$$X_1 - 2X_2 + X_3 = 1$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 = 2$$
$$5X_2 - X_3 = 3$$

פתרון:

$$\left(A\vdots\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת.

דוגמא:

נפתור את המערכת

$$-2X_1 + X_2 + X_3 = 9$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$
$$X_1 + 3X_2 = -3$$

נבנה את המטריצה המורחבת ונדרג

$$\left(A\vdots\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&9\\1&1&1&0\\1&3&0&-3\end{array}\right)\xrightarrow[2R_3+R_1\to R_3]{2R_2+R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&9\\0&3&3&9\\0&7&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&9\\0&1&1&3\\0&7&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-7R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&9\\0&1&1&3\\0&0&-6&-18\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{6}R_3\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&9\\0&1&1&3\\0&0&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&0&6\\0&1&1&3\\0&0&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_1\to R_1]{R_2-R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\vec{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$$

- תהי $\begin{matrix}A\vec{X}=\vec{b}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\end{matrix}$

מערכת לא הומוגנית.

יהיו $\vec{X_1},\vec{X_2}$ שני פתרונות של המערכת. כלומר, מתקיים

$$A\vec{X_1}=\vec{b}$$
$$A\vec{X_2}=\vec{b}$$

$$\Rightarrow A(\vec{X_1}-\vec{X_2})=A\vec{X_1}-A\vec{X_2}=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$$

לכן אם $\vec{X_1},\vec{X_2}$ פתרונות שונים של המערכת הלא הומוגנית אזי $\vec{h}=\vec{X_1}-\vec{X_2}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $A\vec{h}=\vec{0}$

בכיוון ההפוך: אם $\vec{X_1}$ מקיים $A\vec{X_1}=\vec{b}$ ו $\vec{h}$ מקיים $A\vec{h}=\vec{0}$ אזי מתקיים

$$\vec{X_2}=\vec{X_1}+\vec{h}\Rightarrow A\vec{X_2}=A(\vec{X_1}+\vec{h})=A\vec{X_1}+A\vec{h}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$$

משפט:

תהי $\begin{matrix}A\vec{X}=\vec{b}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\end{matrix}$ מערכת ליניארית לא הומוגנית ניתנת לפתרון. אזי הפתרון הכללי של המערכת הוא מהצורה :

$$\vec{X}=\vec{X_1}+\vec{h}(s,t...)$$

כאשר $\vec{X_1}$ פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית ו $\vec{h}(s,t...)$ פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה $(A\vec{X}=\vec{0})$.

דוגמא: נחזור לדוגמא קודמת

$$-X_1 - X_2 + 2X_3 = -1$$
$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = -4$$
$$X_1 + X_2 - 2X_3 = 1$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+t \\ -5+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית

$t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה

דוגמא: נפתור את המערכת הבאה התלויה בפרמטר

$$x + y - z = 1$$
$$x + ky + 3z = 2$$
$$2x + 3y + kz = 3$$

$$k \in \mathbb{R}$$

נקבע עבור אלו ערכים של k:

1. אין פתרון
2. קיים פתרון יחיד
3. קיימים אינסוף פתרונות

פתרון: נבנה את המטריצה המורחבת ונביא לצורה קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ 2 & 3 & k & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & (k-1) & 4 & 1 \\ 0 & 1 & (k+2) & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[k\neq 1]{(k-1)R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & (k-1) & 4 & 1 \\ 0 & 0 & k^2+k-6 & k-2 \end{array}\right)$$

$$k^2 + k - 6 = (k-2)(k+3)$$

עבור k=2 נקבל אינסוף פתרונות

עבור k=-3 נקבל שורת סתירה – אין פתרון

עבור k=1 נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

המטריצה מדורגת ולכן יש לה פתרון יחיד.

אלגברה ליניארית שיעור 5:

פתרון מערכות משוואות ליניאריות (ממ"ל) הומוגניות ולא הומוגניות – סיום:

הגדרה – דרגה של מטריצה:

תהי מטריצה $A\in M_{n\times m}(F)$

הדרגה של A מסומנת ב $Rank(A)$ ומוגדרת להיות מספר השורות שאינן שורות אפסים או לחילופין – מספר השורות שיש בהן איבר מוביל בצורה הקנונית של A.

משפט:

תהי $A\vec{X}=\vec{B}$ ממ"ל לא הומוגנית. אזי למערכת יש פתרונות אם ורק אם מתקיים $Rank(A')=Rank((A'\vdots b'))$

כאשר A' הצורה הקנונית של A ו $(A'\vdots b')$ הצורה הקנונית של המטריצה המורחבת $(A\vdots\vec{b})$

מטריצת היחידה ומטריצות הפיכות:

הגדרה: **מטריצת יחידה מסדר N:**

מטריצת היחידה מסדר N היא מטריצה ריבועית המסומנת $I_n\in M_{n\times n}(F)$ המקיימת $1\le i,j\le n$

$$(In)_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$$

δ_{ij} נקראת דלתא של קרוניקר.

הצורה הכללית של מטריצת יחידה מסדר N היא

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\\vdots&1&\cdots&\vdots\\0&0&\ddots&0\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

- לכל מטריצה $A\in M_{n\times m}(F)$ מתקיים $I_nA=A$

נוכיח:

תהי $A\in M_{n\times m}(F)$ מטריצה בעלת איברים $A=(a_{ij})$ במקרה זה מתקיים

$$1\le i\le n$$
$$1\le j\le m$$

$$(I_nA)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(I_n)_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}a_{kj}=a_{ij}$$

$$\Rightarrow I_nA=A$$

באופן דומה אם $A\in M_{m\times n}\left(F\right)$ אזי מתקיים $AI_n=A$

<u>הגדרה: מטריצה הפיכה מימין:</u>

מטריצה $A\in M_{n\times m}\left(F\right)$ תקרא הפיכה מימין אם קיימת מטריצה $B\in M_{m\times n}\left(F\right)$ כך ש $A*B=I_n$

<u>מטריצה הפיכה משמאל:</u>

מטריצה $A\in M_{n\times m}\left(F\right)$ תקרא הפיכה משמאל אם קיימת מטריצה $B\in M_{m\times n}\left(F\right)$ כך ש $B*A=I_m$

<u>מטריצה A הפיכה מימין ומשמאל תקרא מטריצה הפיכה.</u>

במקרה הזה Aהיא מטריצה ריבועית.

נניח שמתקיים $AB=I$ וגם $CA=I$ אזי מתקיים $B=IB=\left(CA\right)B=C\left(AB\right)=CI=C$

במקרה זה נסמן $A^{-1}:=B=C$ ומתקיים $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

דוגמא:

נקח

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

מתקיים $BA=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

$$\Downarrow$$

$$B=A^{-1}$$

<u>מטריצה אלמנטרית:</u>

הגדרה:

תהי e פעולה אלמנטרית על מטריצות $M_{n\times n}\left(F\right)$. המטריצה האלמנטרית E_e מתקבלת ע"י פעולת השורה $I_n\xrightarrow{e}E_e$

דוגמא:

נמצא את המטריצה האלמנטרית $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ המתאימה לפעולת השורה האלמנטרית $e: R_1 + 4R_3 \to R_1$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+4R_3\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_e$$

<u>טענה:</u>

תהי E_e המטריצה האלמנטרית המתקבלת מביצוע הפעולה e על המטריצה $I_n \in M_{n\times n}(F)$ אזי אם $A \in M_{n\times n}(F)$ מתקיים $A_1 = E_e A$ כאשר $A \xrightarrow{e} A_1$

דוגמא:

תהי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ותהי E_e המטריצה האלמנטרית מהדוגמא הקודמת $E_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

אזי מתקיים $E_e A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$e: R_1 + 4R_3 \to R_1$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 & 19 & 17 \\ 3 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

וניתן לבדוק ש:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+4R_3\to R_1} \begin{pmatrix} 7 & 10 & 19 & 17 \\ 3 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה

נסמן פעולת שורה אלמנטרית בe ואת פעולת השורה ההפוכה ב e^{-1}

תהי E_e המטריצה האלמנטרית המתקבלת ע"י $I_n \xrightarrow{e} E_e$

תהי $E_{e^{-1}}$ המטריצה האלמנטרית המתקבלת ע"י $I_n \xrightarrow{e^{-1}} E_{e^{-1}}$ אזי מתקיים $E_e E_{e^{-1}} = E_{e^{-1}} E_e = I$

טענה:

אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן הפיכות אזי $A*B$ גם היא הפיכה ומתקיים $(A*B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

הוכחה:

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=I$$

<u>משפט:</u>

תהי $A\in M_{n\times n}(F)$. התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה
2. למערכת $A\vec{X}=\vec{0}$ קיים הפתרון הטריוויאלי בלבד
3. לכל וקטור $\vec{b}\in M_{n\times 1}(F)$ למערכת $A\vec{X}=\vec{b}$ קיים פתרון יחיד.
4. A שקולת שורה ל I.
5. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

הוכחה:

$(1)\rightarrow(2)$

נניח ש A מטריצה הפיכה. אזי מתקיים

$$A\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow A^{-1}\left(A\vec{X}\right)=A^{-1}\vec{0}\Rightarrow\left(A^{-1}A\right)\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow I\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow\vec{X}=\vec{0}$$

$(3)\rightarrow(4)$ + $(2)\rightarrow(3)$

נניח שלמערכת $A\vec{X}=\vec{0}$ קיים הפתרון הטריוויאלי בלבד.

במקרה זה הצורה הקנונית של A היא מטריצת היחידה I.

מכיוון שלמערכת $A\vec{X}=\vec{b}$ קיים פתרון (אין שורת סתירה למערכת) ופתרון זה הוא יחיד (אין משתנים חופשיים במערכת)

$(4)\rightarrow(5)$

נניח ש A שקולת שורה ל I

במקרה זה מתקיימת סדרת פעולות שורה $e_1,e_2,...,e_k$ כך ש

$$A\xrightarrow{e_1}A_1\xrightarrow{e_2}A_2\rightarrow...\rightarrow A_{k-1}\xrightarrow{e_k}I$$

נבנה את המטריצות האלמנטריות $E_{e1},E_{e2},...,E_{ek}$ המתאימות לפעולות הנ"ל ונקבל ש

$$I=E_{ek}*...*E_{e2}E_{e1}A$$

$$A^{-1}=E_{ek}*...*E_{e2}E_{e1}$$

בנוסף:

$$E_{ek}^{-1}I=\left(E_{ek}^{-1}E_{ek}\right)E_{ek}*...*E_{e2}E_{e1}A$$

$$\Rightarrow E_{ek}^{-1}E_{ek}^{-1}I=E_{ek}^{-1}E_{ek-1}*...*E_{2}E_{1}A$$

$$E_{1}^{-1}E_{2}^{-1}*...*E_{ek}^{-1}E_{ek-1}*I=A$$

$$(5)\rightarrow(1)$$

מצאנו את A^{-1} כבר בסעיף הקודם.

אלגוריתם למציאת מטריצה הפוכה

המסגרת ההוכחה הקודמת קיבלנו ש

$$I=E_{ek}E_{ek-1}*...*E_{e2}E_{e1}\Rightarrow A\xrightarrow{e1}A_{1}\xrightarrow{e2}A_{2}\rightarrow...\rightarrow I$$

$$A^{-1}=E_{ek}E_{ek-1}*...*E_{2}E_{1}I\Rightarrow I\xrightarrow{e1}B_{1}\xrightarrow{e2}B_{2}\rightarrow...\rightarrow A^{-1}$$

$$\left(A|I\right)\rightarrow\left(I|A^{-1}\right)$$

מכאן אלגוריתם להפיכת מטריצה:

בהנתן מטריצה $A\in M_{n\times n}\left(F\right)$

1. נבנה את המטריצה המורחבת $\left(A\vdots I\right)$
2. נדרג את המטריצה המורחבת הנ"ל לצורה קנונית
3. אם בתהליך הדירוג מופיעה שורת אפסים בחצי השמאלי של המטריצה המורחבת אזי Aאינה הפיכה.
4. אם לא מופיעה שורת אפסים כמו ב3 בתהליך הדירוג אזי בסיום הדירוג נקבל מטריצה מהצורה $\left(I\vdots A^{-1}\right)$

דוגמא:

נהפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$

פתרון:

נבנה את המטריצה המורחבת

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-4R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1+2R_3\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&-1&0&4&0&-1\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[-R_3\to R_3]{-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$

על כן $A^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$

<u>משפט:</u>

יהיו $A,B\in M_{n\times n}(F)$

נניח ש $A*B$ מטריצה הפיכה, אזי A וB מטריצות הפיכות.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח שאם Aאינה הפיכה או B אינה הפיכה או (שתיהן) אינן הפיכות אזי $A*B$ אינה הפיכה.

נניח שB אינה הפיכה.

אזי למערכת $B\overrightarrow{X}=\vec{0}$ קיים פתרון לא טריוויאלי $\overrightarrow{X_0}\neq\vec{0}$

במקרה הזה מתקיים $(AB)\overrightarrow{X_0}=\vec{0}\Rightarrow A\left(B\overrightarrow{X}\right)=\vec{0}$

ולכן $\overrightarrow{X_0}\neq\vec{0}$ הוא פתרון לא טריוויאלי למערכת $(AB)\overrightarrow{X}=\vec{0}$ מכאן ש AB לא הפיכה.

נניח ש Aאינה הפיכה וB הפיכה. במקרה זה קיים וקטור $\overrightarrow{X_0}\neq\vec{0}$ כך ש $A\overrightarrow{X_0}=\vec{0}$ מכאן ש

$$A\overrightarrow{X_0}=\vec{0}\Rightarrow ABB^{-1}\overrightarrow{X_0}=\vec{0}=AB\left(B^{-1}\overrightarrow{X_0}\right)=\vec{0}\Rightarrow AB\overrightarrow{X_1}=\vec{0},\overrightarrow{X_1}=B^{-1}\overrightarrow{X_0}\neq\vec{0}$$

על כן AB אינה הפיכה.

אלגברה ליניארית שיעור 6:

מבנה הבוחן:

3 שאלות נכון לא נכון :הוכחה באם נכון, דוגמא נגדית באם לא נכון.

3 שאלות אמריקאיות

שאלה אחת פתוחה של 40 נק' שאפשר לכתוב "לא יודע" ולקבל שליש ממנה.

המשך משיעור קודם:

תזכורת: מטריצה $A\in M_{m\times n}(F)$ נקראת הפיכה מימין אם קיימת מטריצה $B\in M_{m\times n}(F)$ כך ש $AB=I_m$

מטריצה $A\in M_{m\times n}(F)$ נקראת הפיכה משמאל אם קיימת מטריצה $C\in M_{m\times n}(F)$ כך ש $CA=I_n$

מטריצה $A\in M_{m\times n}(F)$ נקראת הפיכה אם היא הפיכה מימין וגם משמאל.

משפט: אם $A\in M_{m\times n}(F)$ הפיכה אזי היא מטריצה ריבועית.

הוכחה:

נניח שמטריצה $A\in M_{m\times n}(F)$ היא הפיכה ויהיו $B,C\in M_{n\times m}(F)$ מטריצות כך ש $\begin{matrix} AB=I_m \\ CA=I_n \end{matrix}$

נסתכל על המערכת ההומוגנית

$$\begin{matrix} B\in M_{n\times m}(F) \\ B\vec{X}=\vec{0} \end{matrix}$$

נכפיל משמאל בA

$$B\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow A\left(B\vec{X}\right)=A\vec{0}\Rightarrow (AB)\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow I_m\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow \vec{X}=\vec{0}$$

מכאן ש $\vec{X}=\vec{0}$ הוא הפתרון היחיד של $B\vec{X}=\vec{0}$

לכן $n\geq m$ (אם יש פתרון יחיד אז יש לפחות יותר משוואות מנעלמים ולכן)

כעת נסתכל על המערכת ההומוגנית $A\vec{X}=\vec{0}$

נכפיל את המשוואה ב C ונקבל

$$A\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow C\left(A\vec{X}\right)=C\vec{0}\Rightarrow (CA)\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow I_n\vec{X}=\vec{0}\Rightarrow \vec{X}=\vec{0}$$

מכאן ש $\vec{X}=\vec{0}$ הוא הפתרון היחיד של $A\vec{X}=\vec{0}$ לכן $m\geq n$

ומשניהם יחדיו נקבל $m=n$ מש"ל.

משפט:

תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ אם $AB=I_n$ אזי $BA=I_n$.

הוכחה:

<u>טענה:</u> ב A אין שורת אפסים.

הוכחת הטענה: נניח שבA **<u>יש</u>** שורת אפסים.

במקרה זה ב AB יש שורת אפסים, בסתירה לכך שב I_n אין שורת אפסים.

ולכן ב Aאין שורת אפסים.

<u>טענה2:</u> נסמן ב A' את הצורה הקנונית של A. אזי בA' אין שורת אפסים.

הוכחת הטענה: נניח בשלילה שבA' **<u>יש</u>** שורת אפסים.

קיימת מטריצה הפיכה P (מכפלה של מטריצות אלמנטריות) כך ש $A'=PA$

במקרה זה מתקיים

$$P=PI_n=P(AB)=(PA)B=A'B$$

נכפיל את המשוואה מימין בP^{-1}

$$I_n=PP^{-1}=A'(BP^{-1})$$

אם ב A' קיימת שורת אפסים אזי במכפלה יש שורת אפסים, זאת בסתירה לכך שב I_n אין שורת אפסים.

ולכן ב A' אין שורת אפסים.

בנוסף, כיוון שב A' אין שורת אפסים אזי בהכרח $A'=I_n$ ומכאן ש $I_n=PA$

לבסוף, $B=I_nB=(PA)B=P(AB)=PI_n=P$

מכאן ש $BA=PA=I_n$

מרחבים וקטוריים

מרחב וקטורי:

הגדרה: מרחב וקטורי הוא רביעייה $(V,F,+,*)$ הכוללת:

V קבוצת האיברים הנקראים וקטורים

F שדה

$+$ פעולה בינארית $+:V\times V\to V$ הנקראת חיבור וקטורי

$*$ פעולה בינארית $*:F\times V\to V$ הנקראת כפל בסקלר

ומקיימת את התכונות הבאות:

1. $\forall \vec{V_1},\vec{V_2}\in V$ $\quad \vec{V_1}+\vec{V_2}=\vec{V_2}+\vec{V_1}$
2. $\forall \vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3}\in V$ $\quad \vec{V_1}+\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right)=\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)+\vec{V_3}$
3. קיים איבר $\vec{0}\in V$ כך ש $\forall \vec{V}\in V$ $\quad \vec{V}+\vec{0}=\vec{V}$ ($\vec{0}$ נקרא האיבר הניטרלי לחיבור או וקטור האפס)
4. לכל וקטור $\vec{V}\in V$ קיים וקטור $\left(-\vec{V}\right)\in V$ כך ש $\vec{V}+\left(-\vec{V}\right)=\vec{0}$
5. לכל וקטור $\vec{V}\in V$ מתקיים $1*\vec{V}=\vec{V}$ (כאן $1\in F$)
6. לכל $\vec{V}\in V$, $\alpha,\beta\in F$ מתקיים $\alpha*\left(\beta*\vec{V}\right)=(\alpha\beta)\vec{V}$
7. לכל $\alpha\in F$, $\vec{V_1},\vec{V_2}\in V$ מתקיים $\alpha*\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)=\alpha\vec{V_1}+\alpha\vec{V_2}$
8. לכל $\alpha,\beta\in F$, $\vec{V}\in V$ מתקיים $(\alpha+\beta)*\vec{V}=\alpha\vec{V}+\beta\vec{V}$

דוגמא:

נסמן $F^n=\overbrace{F\times F\times F\times\ldots\times F}^{n}=\left\{(a_1,a_2,a_3\ldots a_n):a_i\in F,1\le i\le n\right\}$

נסמן $V=F^n$ ונגדיר את המרחב הוקטורי $(V,F,+,*)=\left(F^n,F,+,*\right)$ כאשר הגדרת החיבור הוקטורי והכפל בסקלאר הן

$$\left.\begin{aligned}\vec{V_1}&=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)\\ \vec{V_2}&=(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{V_1}+\vec{V_2}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}=(a_1,a_2,a_3,...,a_n)\\ \alpha\in F\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\vec{V}=(\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n)$$

ניתן לבדוק שהרביעייה הנ"ל מקיימת את כל התכונות של מרחב וקטורי בפרט $\vec{0}=(0,0,0,...,0)$

<u>דוגמא:</u>

יהי $V=M_{m\times n}(F)$ נגדיר את הרביעייה הבאה $(V,F,+,*)=(M_{m\times n}(F),F,+,*)$

כאשר החיבור הוקטורי והכפל בסקלאר מוגדרים ע"י $A,B\in M_{m\times n}(F)=V\Rightarrow (A,B)=A+B$

($A+B$ חיבור מטריצות)

$$\alpha\in F, A\in M_{m\times n}(F)\Rightarrow(\alpha,A)=\alpha*A$$

אזי הרביעייה הנ"ל מהווה מרחב וקטורי. במרחב זה וקטור האפס הוא

$$\vec{0}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}\in M_{m\times n}(F)$$

<u>דוגמא (מרחב הפולינומים):</u>

נסמן ב$F[X]$ את מרחב כל הפולינומים במשתנה X עם מקדמים בשדה F , למשל

$$p(x)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$$
$$a_i\in F, 0\le i\le n$$

החיבור הוקטורי במרחב מוגדר ע"י

$$p(x)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$$
$$q(x)=b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+...+b_1X+b_0$$
$$n>m$$
$$\Rightarrow(p+q)(X)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+...+(a_m+b_m)X^m+a_{m+1}X^{m+1}+...+a_nX^n$$

וכפל בסקלאר מוגדר ע"י

$$p(x)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$$
$$\alpha\in F$$
$$\Rightarrow$$
$$(\alpha*p)(X)=\alpha a_nX^n+\alpha a_{n-1}X^{n-1}+...+\alpha a_1X+\alpha a_0$$

וקטור האפס במרחב זה הוא פולינום האפס $0(X)=0,\forall X\in F$

<u>תהיה שאלה על מה זה מרחב וקטורי בבוחן!</u>

שאלה:

האם הקבוצת כל הפולינומים ממעלה n מהווה מרחב וקטורי תחת פעולות החיבור הוקטורי והכפל בסקלאר הנ"ל?

<u>תשובה: לא.</u>

למשל פולינום האפס אינו מוכל בקבוצה זו.

שאלה:

האם קבוצת כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל n מהווה מרחב וקטורי תחת הפעולות הנ"ל?

<u>תשובה: כן.</u>

מרחב וקטורי זה מסומן בדרך כלל ב $F_{\le n}\left[X\right]$

<u>דוגמא נוספת:</u>

נסמן $V=\left(0,\infty\right)$, $F=\mathbb{R}$

נגדיר פעולות חיבור וקטורי וכפל בסקלאר ע"י:

$$a,b\in V=\left(o=0,\infty\right)$$
$$a\oplus b:=ab$$

$$\alpha\in\mathbb{R},a\in V=\left(0,\infty\right)$$
$$\alpha\odot a=a^{\alpha}$$

טענה : אזי הרביעייה $\left(V,F,\oplus.\odot\right)=\left(\left(0,\infty\right),\mathbb{R},\oplus,\odot\right)$ מהווה מרחב וקטורי.

נבדוק:

1. $a,b\in\left(0,\infty\right)$
$\vec{a}\oplus\vec{b}=ab=ba=\vec{b}\oplus\vec{a}$

2. $a,b,c\in\left(0,\infty\right)$
$\left(\vec{a}\oplus\vec{b}\right)\oplus\vec{c}=\left(ab\right)c=a\left(bc\right)=\vec{a}\oplus\left(\vec{b}\oplus\vec{c}\right)$

3. נסמן $\vec{0}=1$ ונשים לב לכך ש $\forall a\in\left(0,\infty\right),\vec{0}\oplus\vec{a}=1a=a=\vec{a}$

4. בהנתן וקטור $\vec{a} \in V \Rightarrow a \in (0,\infty)$, $\overrightarrow{(-a)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ מתקיים $\vec{a} \oplus \overrightarrow{(-a)} = a * \frac{1}{a} = 1 = \vec{0}$

5. עבור $\vec{a} \in V$, $1 \in \mathbb{R}$ מתקיים $1 \odot \vec{a} = a^1 = a = \vec{a}$

6. לכל $\vec{a} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\alpha \odot \left(\beta \odot \vec{a}\right) = \alpha \odot \left(\overrightarrow{a^{\beta}}\right) = \left(a^{\beta}\right)^{\alpha} = a^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot \vec{a}$

7. יהיו $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\alpha \odot \left(\vec{a} \oplus \vec{b}\right) = \alpha \odot \left(\overrightarrow{ab}\right) = (ab)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha} = \overrightarrow{\left(a^{\alpha}\right)} \oplus \overrightarrow{\left(b^{\alpha}\right)} = \left(\alpha \odot \vec{a}\right) \oplus \left(\alpha \odot \vec{b}\right)$$

8. יהיו $\vec{a} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$(\alpha + \beta) \odot \vec{a} = a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha} a^{\beta} = \left(\alpha \odot \vec{a}\right) \oplus \left(\beta \odot \vec{a}\right)$$

קיבלנו ש $\left((0,\infty), \mathbb{R}, \oplus, \odot\right)$ הוא מרחב וקטורי.

<u>תכונות כלליות של מרחב וקטורי:</u>

יהי $(V, F, +.*)$ מרחב וקטורי.

א. לכל $\vec{V} \in V$ מתקיים $0 * \vec{V} = \vec{0}$

<u>הוכחה:</u> מתקיים $0 * \vec{V} = (0+0)\vec{V} = 0\vec{V} + 0\vec{V}$

נחבר לשני הצדדים את הוקטור הנגדי $-\left(0 * \vec{V}\right)$

$$-\left(0*\vec{V}\right) + \left(0*\vec{V}\right) = -\left(0*\vec{V}\right) + \left(0*\vec{V} + 0*\vec{V}\right) \Rightarrow \vec{0} = \left(-\left(0*\vec{V}\right) + \left(0*\vec{V}\right)\right) + \left(0*\vec{V}\right) = 0*\vec{V} = \vec{0}$$

ב. לכל $\alpha \in F$ מתקיים $\alpha * \vec{0} = \vec{0}$

<u>הוכחה:</u>

מתקיים $\alpha * \vec{0} = \alpha\left(\vec{0} + \vec{0}\right) = \alpha * \vec{0} + \alpha * \vec{0}$

$$-\left(\alpha*\vec{0}\right)+\alpha*\vec{0}=\left(-\alpha*\vec{0}\right)+\alpha*\vec{0}+\alpha*\vec{0}$$

חיבור האיבר הנגדי $-\left(\alpha*\vec{0}\right)$ לשני האגפים נותן $\Rightarrow$

$$\vec{0}=\left(-\left(-\alpha*\vec{0}\right)+\left(\alpha*\vec{0}\right)\right)+\left(\alpha*\vec{0}\right)=\alpha*\vec{0}$$

ג. לכל $\begin{matrix}\alpha\in F\\ \vec{V}\in V\end{matrix}$ אם $\alpha*\vec{V}=\vec{0}$ אזי $\begin{matrix}\alpha=\vec{0}\\ \vec{V}=\vec{0}\end{matrix}$

<u>הוכחה:</u>

במקרה ש $\alpha=0$ הראנו כבר ש $0*\vec{V}=\vec{0}$, אם $\alpha\neq 0$ אזי קיים האיבר ההופכי α^{-1} ולכן

$$\alpha^{-1}\left(\alpha*\vec{V}\right)=\alpha^{-1}\vec{0}\Rightarrow\left(a^{-1}\alpha\right)\vec{V}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$1*\vec{V}=\vec{0}\Rightarrow\vec{V}=\vec{0}$$

Rotem.S

אלגברה ליניארית שיעור 7

מרחבים וקטוריים המשך:

תתי מרחב:

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי. תת מרחב של V הוא תת קבוצה $W\subseteq V$ המהווה מרחב וקטורי מעל אותו שדה שעליו V מוגדר מיחס לפעולות החיבור הוקטורי וכפל בסקלאר שהוגדרו על V.

(אותו שדה, אותן פעולות, קבוצה בפני עצמה)

דוגמאות:

1. יהי $\mathbb{R}[X]$ מרחב כל הפולינומים במשתנה x מעל השדה $\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{R}_{\le n}[X]$ (מרחב כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה לא במשתנה x) היא תת מרחב של $\mathbb{R}[X]$

הגדרה: מטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$ תקרא סימטרית אם מתקיים $A^T=A$.

2. נסמן $S=\{A\in M_{n\times n}(F):A^T=A\}$.
אזי $S\subseteq M_{n\times n}(F)$ הוא תת מרחב של $M_{n\times n}(F)$

משפט:

יהי V מרחב וקטורי. תת קבוצה של $W\subseteq V$ מהווה תת מרחב של V אם ורק אם:

1) $\vec{0}\in W$
2) לכל $\overrightarrow{W_1},\overrightarrow{W_2}\in W$ ו $\alpha,\beta\in F$ מתקיים $\alpha\overrightarrow{W_1}+\beta\overrightarrow{W_2}\in W$.

נבדוק שהקבוצה המוגדרת בדוגמא 2 היא אכן תת מרחב של $M_{n\times n}(F)$

א. מטריצת האפס מתקיימת:
$0^T=0\Rightarrow 0\in S$

ב. יהיו $A_1,A_2\in S$, $\alpha,\beta\in F$ אזי מתקיים $(\alpha A_1+\beta A_2)^T=\alpha A_1^T+\beta A_2^T=\alpha A_1+\beta A_2$
$\Rightarrow \alpha A_1+\beta A_2\in S$

מכאן ש s היא תת מרחב של $M_{n\times n}$

3. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ נסמן ב W את קבוצת כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\vec{X}=\vec{0}$. אזי W היא תת מרחב של $\mathbb{R}^1$. נראה זאת.

פתרון:

1) ראשית למערכת קיים תמיד הפתרון הטריוויאלי $A\vec{0}=\vec{0}$ ולכן $\vec{0}\in W$ $\left(\vec{0}\in\mathbb{R}^n\right)$
2) יהיו $\overrightarrow{W_1},\overrightarrow{W_2}\in W$ ו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
אזי מתקיים $A\left(\alpha\overrightarrow{W_1}+\beta\overrightarrow{W_2}\right)=\alpha A\overrightarrow{W_1}+\beta A\overrightarrow{W_2}=\alpha\vec{0}+\beta\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow\alpha\overrightarrow{W_1}+\beta\overrightarrow{W_2}\in W$

ולכן שהיא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$

4. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\begin{matrix} A\vec{X}=\vec{b} \\ \vec{b}\neq\vec{0} \end{matrix}$ מערכת משוואות לא הומוגנית פתירה.

נסמן ב W את קבוצת כל הפתרונות של המערכת. אזי W אינה תת מרחב של $\mathbb{R}^n$

5. יהי $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a^2+b^2\le 1\right\}$

אזי W אינה תת מרחב של $\mathbb{R}^2$

נבדוק:

1. $\vec{0}=(0,0)\in W$

2. נקח $\overrightarrow{W_1}=(0,0)$, $\overrightarrow{W_2}=(1,0)$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{W_1}+\beta\overrightarrow{W_2}=(2,0)\notin W$

$\alpha=0,\beta=2$

מכאן ש Wאינה תת מרחב של $\mathbb{R}^2$

<u>הגדרה – צירוף ליניארי:</u>

יהי V מרחב וקטורי. בהנתן וקטורים $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3},...,\overrightarrow{V_k}\in V$ וסקלארים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in F$ וסכומם

$$(1)\ \vec{V}=\alpha_1\overrightarrow{V_1}+\alpha_2\overrightarrow{V_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{V_k}$$

נקרא צירוף ליניארי של $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3},...,\overrightarrow{V_k}\in V$.

נאמר ש $\vec{V}$ הוא צירוף ליניארי של $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3},...,\overrightarrow{V_k}\in V$ אם קיימים סקאלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in F$ כך ש משוואה 1 מתקיימת.

<u>פרישה – הגדרה:</u>

יהי V מרחב וקטורי. תהי $S=\left\{\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},...,\overrightarrow{V_k}\right\}$

$\begin{matrix}\overrightarrow{V_i}\in V \\ 1\le i\le k\end{matrix}$. הפרישה של S מסומנת $Span(S)\equiv Sp(S)$ ומוגדרת להיות קבוצת כל הצירופים הליניאריים של וקטורים מ S עם מקדמים בF כלומר

$$Span(S)=\left\{\alpha_1\overrightarrow{V_1}+\alpha_2\overrightarrow{V_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{V_k} : \alpha_i\in F, 1\le i\le k\right\}$$

<u>משפט</u>

יהי Vמרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $S=\left\{\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},...,\overrightarrow{V_k}\right\}$. אזי $Span(S)$ הוא תת מרחב של V.

הוכחה: נבדוק קיום התנאים של המשפט על תתי מרחב:

1. עבור $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$ נקבל $\vec{0}=0\vec{V_1}+0\vec{V_2}+...+0\vec{V_k}\in Span(S)$
2. יהיו $\begin{matrix}\vec{U_1},\vec{U_2}\in Span(S)\\ \alpha,\beta\in F\end{matrix}$.

כיוון ש $\vec{U_1}\in Span(S)$ קיימים סקלארים $\alpha_1,...,\alpha_k$ כך ש $\vec{U_1}=\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_k\vec{V_k}$

כיוון ש $\vec{U_2}\in Span(S)$ קיימים סקלארים $\beta_1,...,\beta_k$ כך ש $\vec{U_2}=\beta_1\vec{V_1}+\beta_2\vec{V_2}+...+\beta_k\vec{V_k}$

מכאן נקבל ש $\alpha\vec{U_1}+\beta\vec{U_2}=\alpha\left(\alpha_1\vec{V_1}+...+\alpha_k\vec{V_k}\right)+\beta\left(\beta_1\vec{V_1}+...+\beta_k\vec{V_k}\right)$

מכאן ש $Span(S)$ היא תת מרחב של V

הגדרה – קבוצה פורשת:

קבוצה $S=\left\{\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_n}\right\}$ נקראת קבוצה פורשת של מרחב וקטורי V אם מתקיים $V=Span(S)$

דוגמאות:

1. יהי $V=F^n$.נסמן $\vec{e_k}=\left(0,0,...,\underset{insted-of-k}{1},...,0\right)$

אזי $S=\left\{\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n}\right\}$ היא קבוצה פורשת של V. נבדוק.

יהי $\vec{V}=\left(V_1,V_2,...,V_n\right)\in F$ וקטור שרירותי . הקבוצה s תהיה פורשת של v אם לכל $\vec{V}$ כזה קיימים סקלאריים $\alpha_1,...,\alpha_n$ כך ש :

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\\vdots\\V_n\end{pmatrix}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+...+\alpha_n\vec{e_n}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+...+\alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

ואכן אם נבחר $\begin{matrix}a_i=V_i\\1\le i\le n\end{matrix}$ נוכל לרשום

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\\vdots\\V_n\end{pmatrix}=V_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+V_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+...+V_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

מכאן ש S היא קבוצה פורשת של $V=F^n$

2. יהי $V=\mathbb{R}^3$ ותהי $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

נבדוק האם S פורשת את $\mathbb{R}^3$

פתרון: אם S פורשת את $\mathbb{R}^3$ אזי כל וקטור ב$\mathbb{R}^3$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים בS . על כן, בהינתן

$\vec{V}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ עלינו לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

פתרון – למערכת יהיה קיים לכל a,b,c אם הצורה הקנונית של מטריצת המקדמים היא מטריצת היחידה.

'קצת' עבודה מראה שהדירוג לצורה הקנונית היא אכן מטריצת היחידה. לכן S פורשת את $\mathbb{R}^3$

3. יהי $V=R_{\le 2}[X]$ ותהי $S=\{1,1+X,X+X^2\}$

יש לבדוק האם S פורשת את V.

<u>פתרון:</u>

אם S פורשת את V אזי לכל פולינום $P(X)=a*1+bX+cX^2$ קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ כך ש

$$P(X)=a*1+bX+cX^2=a_1*1+\alpha_2(1+X)+\alpha_3(X+X^2)=(\alpha_1+\alpha_2)*1+(\alpha_2+\alpha_3)X+\alpha_3X^2$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1+\alpha_2=a\\a_2+\alpha_2=b\\\alpha_3=c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

- <u>הגדרה של קבוצה פורשת של תת-מרחב דומה להגדרת קבוצה פורשת למרחב.</u>

<u>דוגמאות (הגדרתיות):</u>

1. תהי $A\in M_{m\times n}(F)$ נסמן את שורות המטריצה ב $\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_m}\in F^n$

תת המרחב $Span\{\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_m}\}\subseteq F^n$ נקרא מרחב השורה של A ומסומן ב $Row(A)$

$$Row(A)=Span\{\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_m}\}$$

2. באופן דומה נסמן את עמודות המטריצה A ב $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},...,\overrightarrow{C_n}\in F^m$ אזי תת המרחב של F^m הנפרש ע"י $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},...,\overrightarrow{C_n}$ נקרא מרחב העמודה של A ונסמן $Col(A)=Span\left\{\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},...,\overrightarrow{C_n}\right\}$

<u>טענה:</u>

יהי V מרחב וקטורי. יהי $W\subseteq V$ תת-מרחב ותהי S תת-קבוצה של V

אזי $S\subseteq W$ אם ורק אם $Span(S)\subseteq W$

<u>הוכחה</u>

<u>משמאל לימין:</u>

נניח ש $Span(S)\subseteq W$. יהי $\vec{V}\in S$. אזי $S\subseteq Span(S)\Leftarrow\vec{V}=1*\vec{V}\in Span(S)$

<u>מימין לשמאל:</u>

נניח ש $S\subseteq W$. יהי $\vec{V}\in Span(S)\Rightarrow\vec{V}=\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_k\vec{V_k}$

כאשר $\vec{V_1},...,\vec{V_k}\in S$ כיוון ש W הוא תת-מרחב נקבל ש $\vec{V}\in W$ ולכן $Span(S)\subseteq W$

<u>מסקנה:</u>

תהינה S_1,S_2 תת קבוצות של V. אזי $Span(S_1)=Span(S_2)$ אם ורק אם $S_1\subseteq Span(S_2)\wedge S_2\subseteq Span(S_1)$

<u>הוכחה:</u> מהטענה הנ"ל נובע ש:

$$\left.\begin{array}{l}S_1\subseteq Span(S_2)\Leftrightarrow Span(S_1)\subseteq Span(S_2)\\ S_2\subseteq Span(S_1)\Leftrightarrow Span(S_2)\subseteq Span(S_1)\end{array}\right\}\Rightarrow Span(S_1)=Span(S_2)$$

דוגמא:

יהי $V=\mathbb{R}^3$. נגדיר את הקבוצות

$$S_1=\{(1,0,1),(0,1,1)\}$$
$$S_2=\{(1,1,2),(1,-1,0)\}$$

נרצה להראות ש $Span(S_1)=Span(S_2)$

פתרון: על פי המסקנה הנ"ל תתי-המרחב יהיו שווים אם ורק אם $\begin{array}{l}S_1\subset Span(S_2)\\ S_2\subset Span(S_1)\end{array}$

נשים לב לכך ש

$$\left.\begin{aligned}(1,0,1)&=\frac{1}{2}(1,1,2)+\frac{1}{2}(1,-1,0)\\(0,1,1)&=\frac{1}{2}(1,1,2)-\frac{1}{2}(1,-1,0)\end{aligned}\right\} S_1\subset Span(S_2)$$

$$\left.\begin{aligned}(1,1,2)&=1(1,0,1)+1(0,1,1)\\(1,-1,0)&=1(1,0,1)-1(0,1,1)\end{aligned}\right\} S_2\subset Span(S_1)$$

ולכן $Span(S_1)=Span(S_2)$

<u>הגדרה – מרחב נפרש סופית:</u>

מרחב וקטורי V יקרא נפרש סופית אם קיימת קבוצה סופית $S\subset V$ כך ש $V=Span(S)$

דוגמא:

המרחב הוקטורי F^n נפרש סופית כיוון שהקבוצה $S=\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\right\}$ היא קבוצה סופית פורשת של F^n.

דוגמא למרחב וקטורי שלא נפרש סופית: מרחב כל הפולינומים $\left\{1,X,X^2,X^3...\right\}$

<u>הגדרה – תלות ליניארית:</u>

יהי V מרחב וקטורי ותהי S תת-קבוצה $S=\left\{\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},...,\overrightarrow{V_k}\right\}$. נאמר שS תלויה ליניארית אם קיימים סקלארים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_k\in F$ שאינם כולם אפס כך ש $\alpha_1\overrightarrow{V_1}+\alpha_2\overrightarrow{V_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{V_k}=\vec{0}$

דוגמאות:

1. יהי $V=\mathbb{R}^3$. נבדוק האם הוקטורים $\overrightarrow{U_1}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix},\overrightarrow{U_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\overrightarrow{U_3}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix},\overrightarrow{U_4}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ מהווים קבוצה תלויה ליניארית.

פתרון: עלינו לפתור את מערכת המשוואות $\vec{0}=\alpha_1\overrightarrow{U_1}+\alpha_2\overrightarrow{U_2}+\alpha_3\overrightarrow{U_3}+\alpha_4\overrightarrow{U_4}$

$$\Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3&-1&4&2\\0&1&2&1\\-3&2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

למערכת זו יש בבירור אינסוף פתרונות ולכן הקבוצה $\left\{\overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2},\overrightarrow{U_3},\overrightarrow{U_4}\right\}$ היא תלויה ליניארית
(קבוצה שאינה תלויה ליניארית נקראת בלתי תלויה ליניארית – בת"ל)

אלגברה ליניארית שיעור 8

מרחבים וקטוריים:

תלות ליניארית:

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי ותהי $S=\{\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_k}\}$, $1\le i\le k, \vec{V_i}\in V$. נאמר ש S קבוצה תלויה ליניארית אם קיימים סקלאריים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k \in F$ שאינם כולם אפס כך ש

$$\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_k\vec{V_k}=\vec{0}$$

דוגמאות:

.1

$$S=\left\{\vec{V_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\vec{V_2}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\vec{V_3}=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$V=\mathbb{R}^3$$

נבדוק האם S תלויה ליניארית.

פתרון:

אם S תלויה ליניארית אזי קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ שאינם כולם אפס כך ש

$$\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+\alpha_3\vec{V_3}=\vec{0}$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&5\\-1&3&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix}1&1&5\\-1&3&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&1&5\\0&4&8\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{4R_3+R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&1&5\\0&4&8\\0&0&0\end{pmatrix}$$

במערכת הזו קיים משתנה חופשי ולכן יש לה פתרונות לא טריוויאליים. על כן S תלויה ליניארית.

.2

נראה שהוקטורים

$$\vec{V_1}=(0,0,7,-2),\vec{V_2}=(0,5,-3,1),\vec{V_3}=(6,2,3,4)$$

בלתי תלויה ליניארית ב $V=\mathbb{R}^4$.

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

פתרון. אם $S=\left\{\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}\right\}$ היא תלויה ליניארית אזי קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ שאינם כולם אפסים כך ש $\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+\alpha_3\vec{V_3}=\vec{0}$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0\\0\\7\\-2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\5\\-3\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}6\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&6\\0&5&2\\7&-3&3\\-2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&6\\0&5&2\\7&-3&3\\-2&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}-2&1&4\\0&5&2\\7&-3&3\\0&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_3+7R_1\to R_3}\begin{pmatrix}-2&1&4\\0&5&2\\0&1&34\\0&0&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}-2&1&4\\0&5&2\\0&0&168\\0&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow{168R_4-6R_3\to R_4}\begin{pmatrix}-2&1&4\\0&5&2\\0&0&168\\0&0&0\end{pmatrix}$$

במערכת זו אין משתנים חופשיים ולכן פתרון המערכת הוא $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ מכן ש sהיא בלתי תלויה ליניארית.

<u>משפט</u>:

יהי V מרחב וקטורי ותהי $S=\left\{\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_n}\right\}$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. s תלויה ליניארית
2. לפחות אחד מהוקטורים $\vec{V_2},...,\vec{V_n}$ תלוי ליניארית בקודמיו.
3. לפחות אחד מהוקטורים $\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_n}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים ב s.

<u>הוכחה:</u>

$2\to1$: נניח s ת"ל (תלויה ליניארית). מכאן שקיימים סקאלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$ שאינם כולם 0 כך ש $\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_k\vec{V_k}+...+\alpha_n\vec{V_n}=\vec{0}$

יהי α_k הסקאלר האחרון שאינו אפס. במקרה זה מתקיים:

$$\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_k\vec{V_k}=\vec{0}\Rightarrow\vec{V_k}=\frac{-\alpha_1}{\alpha_k}\vec{V_1}-...-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\overrightarrow{V_{k-1}}$$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

$2 \rightarrow 3$:מיידי.

$3 \rightarrow 1$:

נניח ש $\overrightarrow{V_k}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים. כלומר :

$$\overrightarrow{V_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i \overrightarrow{V_i} \Rightarrow \alpha_1 \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \overrightarrow{V_2} + \ldots - \overrightarrow{V_k} + \alpha_k \overrightarrow{V_{k+1}} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{V_n} = \vec{0}$$

וכיוון שהמקדם של $\overrightarrow{V_k}$ הוא (-1) הקבוצה תלויה ליניארית.

<u>מספר מסקנות מידיות מהגדרת תלות ליניארית:</u>

1. כל קבוצת וקטורים הכוללת את וקטור האפס $\vec{0}$ היא תלויה ליניארית.
2. כל תת-קבוצה של קבוצה בלתי תלויה ליניארית היא בלתי תלויה ליניארית.
3. כל קבוצת וקטורים הכוללת תת-קבוצה תלויה ליניארית היא בעצמה תלויה ליניארית

<u>בסיס למרחב וקטורי:</u>

<u>משפט:</u>

יהי V מרחב וקטורי. תהי S תת-קבוצה סופית של V (לא כולל את $\vec{0}$), אזי קיימת תת-קבוצה $S' \subseteq S$ כך ש S היא בת"ל ו $Span(S') = Span(S)$.

<u>הוכחה:</u>

תהי $S = \{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots, \overrightarrow{V_n}\}$. יהי $\overrightarrow{W} \in Span(S)$ וקטור שרירותי.

מכאן שקיימים $\overrightarrow{W} = \alpha_1 \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \overrightarrow{V_2} + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{V_k} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{V_n}$

נניח ש S תלויה ליניארית. לפי המשפט הקודם קיים וקטור, נניח $\overrightarrow{V_k}$, שתלוי ליניארית בקודמיו.

$$\overrightarrow{V_k} = \beta_1 \overrightarrow{V_1} + \ldots + \beta_{k-1} \overrightarrow{V_{k-1}}$$

לכן $\overrightarrow{W} = \alpha_1 \overrightarrow{V_1} + \alpha_2 \overrightarrow{V_2} + \ldots + \alpha_k \left(\beta_1 \overrightarrow{V_1} + \ldots + \beta_{k-1} \overrightarrow{V_{k-1}} \right) + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{V_n}$

נמשיך בתהליך באותו אופן עד לקבלת קבוצה מינימלית S' שהיא בהכרח בלתי תלויה ליניארית.

<u>הגדרה (בסיס):</u>

יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית (יש קבוצה סופית של וקטורים שפורשת אותו).

תת-קבוצה $S \subset V$ תקרא בסיס של V אם S בת"ל ופורשת את V.

<u>מסקנה מהמשפט (לאור ההגדרה):</u>

למרחב וקטורי נפרש סופית קיים בסיס.

הוכחה:

יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית, כלומר, קיימת קבוצה סופית $S\subset V$ כך ש $Span(S)=V$. לפי המשפט האחרון קיימת תת-קבוצה $S'\subseteq S$ של S שהיא בת"ל ו $Span(S')=Span(S)=V$

לפי הגדרת בסיס S' היא בסיס של V.

דוגמא:

נסתכל על המרחב הוקטורי $V=F^n$. הקבוצה $E=\left\{\hat{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\hat{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\hat{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה

בסיס של F^n. נראה זאת.

פתרון:

יהי $F^n \ni \vec{V_1}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\\vdots\\V_n\end{pmatrix}$ וקטור שרירותי. אזי מתקיים

$$\vec{V_1}=V_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+V_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+...+V_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=V_1\hat{e}_1+V_2\hat{e}_2+...+V_n\hat{e}_n$$

לכן E פורשת את F^n.

נבדוק האם E היא בת"ל:

$$\alpha_1\hat{e}_1+\alpha_2\hat{e}_2+...+\alpha_n\hat{e}_n=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+...+\alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Rightarrow 0\le i\le n,\alpha_i=0$$

מכאן ש E בת"ל. על כן E היא בסיס של F^n.

(בסיס זה נקרא הבסיס הסטנדרטי של F^n)

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

- בסיס למרחב פתרונות של ממ"ל הומוגנית:

<u>דוגמא:</u>

נתונה מערכת המשוואות ההומוגנית הבאה:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

יש לפתור את המערכת ולמצוא בסיס למרחב הפתרונות.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_1+R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}R_2\to R_2]{\frac{1}{5}R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

כאן x_3 ו x_4 משתנים חופשיים. $\begin{matrix} x_4 = t \\ x_3 = s \end{matrix}$

ואנו מקבלים $\begin{matrix} x_1 = \frac{-3}{5}s - t \\ x_2 = \frac{1}{5}s \end{matrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5}s - t \\ \frac{1}{5}s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון 📚

מכאן שאם נסמן את מרחב הפתרונות בW אזי $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס של W

מימד: (מעכשיו כל המרחבים שאנחנו מדברים עליהם נפרשים סופית, לא סופית זה קורס מפחיד בעתיד...)

משפט:

יהי V מרחב וקטורי. יהיו S_1, S_2 שתי קבוצות סופיות של וקטורים בV. נסמן את הגודל (מספר הוקטורים) בקבוצה סופית S של וקטורים מV $|S|$. נניח ש S_1 פורשת את V ו S_2 בלתי תלויה ליניארית. אזי מתקיים $|S_1| \geq |S_2|$.

(בעברית – גודל הקבוצה הפורשת גדול שווה לגודל הקבוצה הבלתי תלויה ליניארית)

הוכחה:

נסמן : $S_1 = \{\vec{V_1}, \vec{V_2}, ..., \vec{V_m}\}$, $S_2 = \{\vec{W_1}, \vec{W_2}, ..., \vec{W_n}\}$

נניח ש $|S_1| = m$, $|S_2| = n$. עלינו להוכיח ש $m \geq n$.

נניח בשלילה ש $n > m$.

יהיו $C_i, 1 \leq i \leq n$ סקלארים כך ש $\sum_{i=1}^{n} C_i \vec{W_i} = \vec{0}$.

כיוון ש S_1 פורשת את V קיימים סקלארים a_{ji} כך ש $\vec{W_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{V_j}$, $1 \leq i \leq n$

נציב ונקבל $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{W_i} = \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{V_i} \right) =$ (החלפת סדר הסכימה)

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} C_i \right) \vec{V_j}$$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

נסתכל על $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}C_i = 0$ כמערכת משוואות הומוגנית של M משוואות בn נעלמים. על פי ההנחה $n > m$ למערכת זו קיים פתרון לא טריוויאלי.

$\left(C_1, C_2, ..., C_n\right)$כך שקיים $C_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. על כן קבוצה S_2 אינה יכולה להיות בת"ל.

<u>מסקנה:</u>

בכל הבסיסים של V יש אותו מספר וקטורים.

<u>הוכחה:</u>

יהיו S_1, S_2 בסיסים של V.

כיוון ש S_1 פורשת ו S_2 בת"ל נקבל ש $|S_2| \leq |S_1|$. כיוון ש S_2 פורשת ו S_1 בת"ל נקבל ש $|S_2| \geq |S_1|$

על כן $|S_2| = |S_1|$.

<u>הגדרה: מימד:</u>

המימד של מרחב וקטורי V נפרש סופית שווה למספר הוקטורים בבסיס שרירותי של V.

את המימד של V מסמנים ב $\dim(V)$.

דוגמאות:

1. ראינו של- $V = F^n$ קיים הבסיס הסטנדרטי $B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n\}$. $\dim\left(F^n\right) = n$.

דוגמא: נסתכל על מרחב הפולינומים $V = \mathbb{R}_{\leq n}[x]$. למרחב זה קיים בסיס סטנדרטי (**<u>לבדוק!</u>**) $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ לכן $\dim\left(\mathbb{R}_{\leq n}[x]\right) = n+1$.

<u>דוגמא:</u>

יהי V המרחב הוקטורי של מטריצות 2×2 סימטריות מעל שדה F. יש להראות ש $\dim(V) = 3$.

<u>פתרון:</u>

<u>טענה</u>: קבוצת המטריצות הבאה היא בסיס של V.

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

$$B_V=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

נבדוק:

1. מטריצה שרירותית ב Vהיא מהצורה $m=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$

ולכן $m=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

כלומר: $V=Span\left(B_V\right)$

2. $\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a_1=\alpha_2=\alpha_2=0$

מכאן ש B_V היא בלתי תלויה ליניארית.

על כן B_V היא בסיס של V ו $\dim\left(V\right)=\left|B_v\right|=3$

<u>מסקנה:</u>

יהי V מרחב וקטורי ממימד $\dim\left(V\right)=n$. תהי S קבוצה סופית של וקטורים בV.

מתקיים:

א. אם S פורשת את V אזי $\left|S\right|\geq n$.

ב. אם S בת"ל אזי $\left|S\right|\leq n$

(בעברית – אם נתנו לנו יותר וקטורים מהמימד אזי בוודאות חלקם תלויים ליניארית!)

ג. אם S פורשת את V ו $\left|S\right|=n$ אזי Sהיא בסיס של V, ולהפך.

ד. אם S בת"ל $\left|S\right|=n$ אזי S בסיס.

<u>הוכחה:</u>

א. יהי B בסיס שרירותי של V.
כיוון ש B בסיס מתקיים: $\left|B\right|=n$.

כיוון שS פורשת וB בת"ל מתקיים $\left|S\right|\geq\left|B\right|=n$.

ב. נקח בסיס B כמו ב א'. כיוון ש B פורשת וS בת"ל מתקיים $\left|S\right|\leq\left|B\right|=n$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

ג. נניח שS פורשת ו $|S|=n$ ונניח בשלילה ש S תלויה ליניארית. במקרה זה קיימת תת-קבוצה $S'\subset S$ כך ש $|S'|<|S|=n$ ו $Span(S')=Span(S)=V$. קיבלנו סתירה לסעיף א' ועל כן S בהכרח בת"ל.

ד. נניח ש S בת"ל, $|S|=n$ ונניח בשלילה ש $Span(S)\neq V$. במקרה זה קיים וקטור $\vec{W}\in V$ כך ש $\vec{W}\notin Span(S)$ והקבוצה $S\cup\{\vec{W}\}$ היא בת"ל וכוללת $n+1$ וקטורים בסתירה לסעיף ב'.

דוגמא:

נבדוק האם הקבוצה $B=\{(1+x),(x+x^2),(x^2+x^3),...,(x^{n-1}+x^n)\}$

היא בסיס של $V=\mathbb{R}_{\le n}[x]$?

פתרון: התשובה היא לא.

נימוק: המימד של המרחב $\dim(\mathbb{R}_{\le n}[x])=n+1$ ו $|B|=n$ לכן B אינה יכולה להיות בסיס של V.

דוגמא:

יהי $V=\mathbb{R}^3$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נבדוק האם B הוא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

ראשית , $|B|=\dim(V)=3$

נבדוק האם הקבוצה בלתי תלויה ליניארית:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

מכאן ש B היא בת"ל. לפי סעיף ד' של המסקנה נקבל שB בסיס של $\mathbb{R}^3$.

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? העוגה האהובה עלי היא פאי לימון

Rotem

אלגברה ליניארית שיעור 9:

בסיס ומימד – המשך:

משפט: יהי V מרחב וקטורי ממימד $\dim(V)=n$ מעל שדה F. תהי $B=\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ קבוצת וקטורים בV. אזי שתי הקביעות הבאות שקולות:

1. B היא בסיס של V.
2. כל וקטור $\vec{v}\in V$ ניתן לביטוי יחיד כצירוף ליניארי באופן יחיד כצירוף ליניארי $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+...\alpha_n\vec{v_n}$ (משוואה1)

הוכחה :

$(1)\Rightarrow(2)$:

נניח ש B בסיס של V. כיוון ש B קבוצה פורשת. קיימים סקלארים $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$ כך שמשוואה 1 מתקיימת. עתה נראה שהצירוף הוא יחיד. נניח שקיימים $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$ ו $\beta_1,...,\beta_n\in F$ כך ש $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+...\alpha_n\vec{v_n}$ ו $\vec{v}=\beta_1\vec{v_1}+...\beta_n\vec{v_n}$

$$\Rightarrow\vec{0}=(\alpha_1-\beta_1)\vec{v_1}+...+(\alpha_n-\beta_n)\vec{v_n}$$

כיוון ש B הוא בסיס נקבל ש $\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_n=\beta_n$ בניגוד להנחה.

$(2)\Rightarrow(1)$:

נניח שלכל וקטור $\vec{v}\in V$ יש צירוף ליניארי יחיד $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+...\alpha_n\vec{v_n}$. מההנחה הנ"ל נקבל ש B פורשת את V. בנוסף, מתקיים $0\vec{v_1}+...+0\vec{v_n}=\vec{0}$.

מכיוון שהצירוף הליניארי הזה הוא יחיד על פי ההנחה , נקבל ש B בת"ל ולכן היא בסיס.

הגדרה (וקטור קואורדינאטות):

יהי V מרחב וקטורי ממימד $\dim(V)=n$ מעל שדה F. יהי $B=\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\}$ בסיס של V. מכאן שקיים צירוף ליניארי יחיד כך ש $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_n\vec{v_n}$ לכל וקטור $\vec{v}\in V$. וקטור הקואורדינטות של $\vec{v}$ ביחס לבסיס B יסומן ב $[\vec{v}]_B$ ויוגדר להיות

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_n\vec{v_n}\Leftrightarrow[\vec{v}]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}\in F^n$$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

משפט:

יהי V מרחב וקטורי ממימד $\dim(V)=n$ מעל שדה F ויהי $W\subseteq V$ תת-מרחב של V . אזי המימד של $\dim(W)\le n$. ואם $\dim(W)=n$ אזי V=W.

הוכחה:

תהי B_1 קבוצה בת"ל של וקטורים ב W . כיוון $\dim(W)=n$ בהכרח $|B_1|\le n$

אם B_1 פורשת את W אזי B_1 היא בסיס של W ו $\dim(W)\le n$. אם B_1 לא פורשת את W אז קיים וקטור $\overrightarrow{W_1}$ כך ש $\overrightarrow{W_1}\notin Span(B_1)$, מכאן שניתן לקחת את הוקטור ולהוסיפו $B_2=B_1\cup\{\overrightarrow{W_1}\}$ ונקבל קבוצה בלתי תלויה ב W. נמשיך באופן דומה ונקבל קבוצה מקסימאלית של איברים בלתי תלויה ליניארית $B_W=\{\overrightarrow{W_1},\overrightarrow{W_2},...,\overrightarrow{W_m}\}$ שפורשת את W ו $m\le n$ ולכן $\dim(W)=m\le n$.

מציאת בסיס לתת-מרחב הנפרש ע"י קבוצה נתונה של וקטורים:

תהי $S=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}\}$ קבוצה נתונה של וקטורים במרחב הוקטורי V. קבוצה זו פורשת תת-מרחב $W=Span(S)$. נרצה למצוא בסיס לW.

אלגוריתם א:

יהי $V=F^n$ ו $S=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}\}$

1. נבנה מטריצה A ששורותיה הן הוקטורים $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}$.
2. מדרגים את המטריצה לצורה קנונית (תכלס' מספיק מדורגת).
3. השורות שאינן שורות אפסים בצורה הקנונית A' מהוות בסיס ל $W=Span(S)$.

דוגמא:

יהי $W\subset\mathbb{R}^4$ תת-המרחב של $\mathbb{R}^4$ הנפרש ע"י

$$S=\left\{\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix},\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix},\overrightarrow{u_3}=\begin{pmatrix}3\\8\\-3\\-5\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא בסיס של W.

פתרון:

ראשית נבנה מטריצה A ששורותיה הן $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\2&3&1&-4\\3&8&-3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[dirog]{after}\begin{pmatrix}1&-2&5&-3\\0&7&-9&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

מכאן ש $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\-9\\2\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של W ו $\dim(W)=2$.

<u>אלגוריתם ב:</u>

יהי V מרחב וקטורי ותהי $S=\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_k}\}$ ויהי $W=Span(S)$. נרצה למצוא בסיס ל W (נניח ש $V=F^n$)

1. נבנה מטריצה Aשעמודותיה הן הוקטורים $\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_k}$ ונסמן את ההתאמה של כל עמודה ב A לוקטור בS.
2. נדרג את A לצורה קנונית A′
3. עבור כל עמודה בA' שאין בה איבר מוביל (משתנה חופשי) נשמיט את הוקטור המתאים לעמודה הזו מS.
4. הקבוצה החדשה שתתקבל (הוקטורים הנותרים ב Sלאחר ההשמטה) מהווים בסיס של תת-המרחב הוקטורי W.

<u>דוגמא:</u>

יהי $V=\mathbb{R}^5$, ויהי W תת-המרחב הנפרש ע"י

$$\vec{w_1}=(1,2,-1,3,4),\vec{w_2}=(2,4,-2,6,8),\vec{w_3}=(1,3,2,2,6),\vec{w_4}=(1,4,5,1,8),\vec{w_5}=(2,7,3,3,9)$$

נרצה למצוא בסיס של W.

<u>פתרון:</u>

נעשה שימוש באלגוריתם ב:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&2\\2&4&3&4&7\\-1&-2&2&5&3\\3&6&2&1&3\\4&8&6&8&9\\\vec{w_1}&\vec{w_2}&\vec{w_3}&\vec{w_4}&\vec{w_5}\end{pmatrix}\xrightarrow[dirog]{after}\begin{pmatrix}1&2&1&1&2\\0&0&1&2&3\\0&0&0&0&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

העמודות המתאימות ל $\vec{w_2}$ ו $\vec{w_4}$ מכילות איבר מוביל ולכן הבסיס המתקבל עבור W הוא $B_W\{\vec{w_1},\vec{w_3},\vec{w_5}\}$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

הגדרה: מרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה:

תהי $A\in M_{m\times n}\left(F\right)$.

נסמן את שורותיה של A ב $\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},\overrightarrow{R_3},...,\overrightarrow{R_m}\in F^n$. נסמן את עמודותיה של A ב $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},\overrightarrow{C_3},...,\overrightarrow{C_n}\in F^m$.

מרחב השורה של A מסומן ב $Row\left(A\right)$ ומוגדר ע"י $Row\left(A\right)=Span\left\{\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_m}\right\}\subseteq F^n$.

מרחב העמודה של A מסומן ב $Col\left(A\right)$ ומוגדר ע"י $Col\left(A\right)=Span\left\{\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},...,\overrightarrow{C_n}\right\}\subseteq F^m$.

הגדרה: דרגת עמודה ודרגת שורה:

תהי $A\in M_{m\times n}\left(F\right)$.

דרגת השורה של A מסומנת ב $RowRank\left(A\right)$ ומוגדרת ע"י $RowRank\left(A\right)=\dim\left(Row\left(A\right)\right)$

דרגת העמודה של A מסומנת ב $ColRank\left(A\right)$ ומוגדרת ע"י $ColRank\left(A\right)=\dim\left(Col\left(A\right)\right)$

טענה:

תהי $A\in M_{m\times n}\left(F\right)$.

אזי $RowRank\left(A\right)=ColRank\left(A\right)$.

(אם מסתכלים על כמות השורות עם איבר מוביל, וכמות העמודות עם איבר מוביל, הכמות תהיה זהה)

הגדרה: דרגת מטריצה:

בהינתן מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(F\right)$ הדרגה של המטריצה תסומן ב $Rank\left(A\right)$ ותוגדר ע"י $Rank\left(A\right)=RowRank\left(A\right)=ColRank\left(A\right)$.

משפט:

יהיו
$$A\in M_{m\times k}\left(F\right)$$
$$B\in M_{k\times n}\left(F\right)$$

אזי $Rank\left(AB\right)\le\min\left\{Rank\left(A\right),Rank\left(B\right)\right\}$

הוכחה:

מתקיים:

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

$$(AB)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ...\overrightarrow{R_1}... \\ \vdots \\ ...\overrightarrow{R_k}... \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\overrightarrow{R_1} & \cdots & a_{1k}\overrightarrow{R_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\overrightarrow{R_1} & \cdots & a_{mk}\overrightarrow{R_k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Row(AB)\subseteq Row(B)\Rightarrow \dim\big(Row(AB)\big)\le \dim\big(Row(B)\big)\Rightarrow Rank(AB)\le Rank(B)$$

באופן דומה נקבל

$$Col(AB)\subseteq Col(A)\Rightarrow \dim\big(Col(AB)\big)\le \dim\big(Col(A)\big)\Rightarrow Rank(AB)\le Rank(A)$$

$$\Rightarrow Rank(AB)\le \min\{Rank(A), Rank(B)\}$$

<u>טענה:</u>

יהי V מרחב וקטורי ממימד $\dim(V)=n$ מעל שדה F. יהי W תת-מרחב של V, $\dim(W)=m$

ויהי $B_W=\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},...,\overrightarrow{w_m}\}$ אזי קיימים וקטורים $\overrightarrow{w_{m+1}},...,\overrightarrow{w_n}$ כך ש $B_v=\{\overrightarrow{w_1},...,\overrightarrow{w_m},\overrightarrow{w_{m+1}},...,\overrightarrow{w_n}\}$ היא הבסיס של V.

(מוסיפים וקטור אחרי וקטור – שואלים האם הצירוף של הוקטור לקבוצה פורש את V עד שהגענו לקבוצה הפורשת.)

<u>סכום וחיתוך של תתי-מרחב ומשפט הממדים לתתי-מרחב:</u>

<u>טענה:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . יהיו W_1 ו W_2 תתי-מרחב של V. אזי $W_1\cap W_2$ הוא תת-מרחב של V.

הוכחה:

1. כיוון ש $\vec{0}\in W_1$ ו $\vec{0}\in W_2$ (מכך שהם תתי-מרחב) אזי $\vec{0}\in W_1\cap W_2$.
2. יהיו $\alpha,\beta\in F$ ו $\vec{u},\vec{v}\in W_1\cap W_2$. אזי כיוון ש $\vec{u},\vec{v}\in W_1$ וכיוון ש W_1 הוא תת-מרחב נקבל ש $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in W_1$.
   כיוון ש $\vec{u},\vec{v}\in W_2$ וכיוון ש W_2 הוא תת-מרחב נקבל ש $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in W_2$ ולכן $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in W_1\cap W_2$.

מכאן ש $W_1\cap W_2$ הוא תת-מרחב של V.

נשים לב שבאופן כללי $W_1\cup W_2$ אינו תת-מרחב של V. לדוגמא $V=\mathbb{R}^2$.

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

$W_1=\{(x,0),x\in\mathbb{R}\}$ ו $W_2=\{(0,y),y\in\mathbb{R}\}$ נשים לב לכך ש

$$\left.\begin{matrix}(x,0)\in W_1\\(0,y)\in W_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x,0)+(0,y)=(x,y)\notin W_1\cup W_2$$

לכן נגדיר:

<u>הגדרה: סכום של תתי-מרחב:</u>

יהי Vמרחב וקטורי ו W_1,W_2 תתי-מרחב של V. הסכום W_1+W_2 יוגדר ע"י

$$W_1+W_2=\left\{\overrightarrow{W_1}+\overrightarrow{W_2}:\overrightarrow{W_1}\in W_1,\overrightarrow{W_2}\in W_2\right\}$$

<u>טענה:</u>

W_1+W_2 הוא תת מרחב של V.

<u>הוכחה:</u>

1. כיוון ש $\vec{0}\in W_1$, $\vec{0}\in W_2$, נקבל ש $\vec{0}=\underset{\in W_1}{\vec{0}}+\underset{\in W_2}{\vec{0}}\in W_1+W_2$
2. יהיו $\vec{u},\vec{v}\in W_1+W_2$, $\alpha,\beta\in F$ קיימים $\overrightarrow{u_1}\in W_1$, $\overrightarrow{u_2}\in W_2$ כך ש $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$

באופן דומה $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_2}\in W_2$ ו $\overrightarrow{v_1}\in W_1$ ולכן

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)+\beta\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right)=\underset{\in W_1}{\left(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{v_1}\right)}+\underset{\in W_2}{\left(\alpha\overrightarrow{u_2}+\beta\overrightarrow{v_2}\right)}\in W_1+W_2$$

<u>משפט המימדים לתתי מרחב:</u>

יהי V מרחב וקטורי ו W_1,W_2 תתי-מרחב של V. אזי מתקיים

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

<u>הוכחה:</u>

יהי $B_{W_1\cap W_2}=\left\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},...,\overrightarrow{w_l}\right\}$ בסיס ל $W_1\cap W_2$ (כאשר $\dim(W_1\cap W_2)=l$)

נשלים את $B_{W_1\cap W_2}$ לבסיס של W_1 ע"י הוספת וקטורים.

$B_{W_1}=\left\{\overrightarrow{w_1},...,\overrightarrow{w_l},\overrightarrow{u_{l+1}},...+\overrightarrow{u_m}\right\}$ (החלפה לאות u לצורך הבדלה מה היה ומה החדש)

כאן $\dim(W_1)=m$

באופן דומה נשלים לבסיס של W_2.

$$B_{W_2}=\left\{\overrightarrow{w_1},...,\overrightarrow{w_l},\overrightarrow{v_{l+1}},...,\overrightarrow{v_n}\right\}$$

$$\dim(W_2)=n$$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

<u>טענה:</u>

$B_{W_1+W_2}=\left\{\overrightarrow{w_1},...,\overrightarrow{w_l},\overrightarrow{u_{l+1}},....\overrightarrow{u_m},\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_n}\right\}$ היא הבסיס של W_1+W_2.

בבירור $Span\left(B_{W_1+W_2}\right)=W_1+W_2$. נותר לנו להראות ש $B_{W_1+W_2}$ היא בת"ל.

נניח בשלילה שקבוצה זו היא תלויה ליניארית.

במקרה זה ניתן לרשום $a_1\overrightarrow{w_1}+...+a_l\overrightarrow{w_l}+b_1\overrightarrow{u_{l+1}}+...+b_{m-l}\overrightarrow{u_m}+c_1\overrightarrow{v_{l+1}}+...+c_{n-l}\overrightarrow{v_n}=\vec{0}$

כאשר לא כל המקדמים הם אפס. מכאן:

$$\underbrace{a_1\overrightarrow{w_1}+...+a_l\overrightarrow{w_l}+b_1\overrightarrow{u_{l+1}}+...+b_{m-l}\overrightarrow{u_m}}_{\in W_1}=\underbrace{-\left(c_1\overrightarrow{v_{l+1}}+...+c_{n-l}\overrightarrow{v_n}\right)}_{\in W_2}$$

מכאן ש $\vec{w}\in W_1\cap W_2$

לכן קיימים סקלארים $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_l$ כך ש $\vec{w}=\gamma_1\overrightarrow{w_1}+\gamma_2\overrightarrow{w_2}+...+\gamma_l\overrightarrow{w_l}$

מכאן נקבל ש $b_1=b_2=...=b_{m-l}=0$

ו ש $c_1=c_2=...=c_{n-l}=0$

מכך אנו מסיקים שגם $a_1=a_2=...=a_l=0$ ולכן $B_{W_1+W_2}$ בת"ל.

נסיק ש $B_{W_1+W_2}$ היא בסיס של W_1+W_2 ומכאן

$$\dim\left(W_1+W_2\right)=\left|B_{W_1+W_2}\right|=l+\left(m-l\right)+\left(n-l\right)=m+n-l=\dim\left(W_1\right)+\dim\left(W_2\right)-\dim\left(W_1\cap W_2\right)$$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? הממתק האהוב עלי הוא happy hippo לבן.

Retemp

אלגברה ליניארית שיעור 10:

העתקות ליניאריות:

הגדרה – העתקה ליניארית:

יהי V ו W מרחבים וקטורים מעל שדה F (שניהם מעל אותו שדה).

העתקה ליניארית מV לW היא פונקציה $T:V\to W$ המקיימת:

$$\forall \alpha,\beta\in F,\forall \vec{V_1},\vec{V_2}\in V$$

$$T\left(\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\right)=\underbrace{\alpha T\left(\vec{V_1}\right)+\beta T\left(\vec{V_2}\right)}_{\in W}$$

דוגמאות:

1. יהי $V=\mathbb{R}^n$ ו $W=\mathbb{R}^m$. בהינתן מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ נגדיר העתקה $T:V\to W$ ע"י

$$\forall \vec{V}\in V:T\left(\vec{V}\right)=A\vec{V}$$

נראה ש T העתקה ליניארית.

יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ו $\vec{V_1},\vec{V_2}\in\mathbb{R}^n$ אזי מתקיים

$$T\left(\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\right)=A\left(\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\right)=\alpha A\vec{V_1}+\beta A\vec{V_2}=\alpha T\vec{V_1}+\beta T\vec{V_2}$$

2. יהי $V=\mathbb{R}^3$, $W=\mathbb{R}^2$ נגדיר העתקה $T:V\to W,T\left((a,b,c)\right)=(a+b-c,2a+3b+c)$

אזי T היא העתקה ליניארית. נראה זאת.

יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\vec{V_1}=(a_1,b_1,c_1),\vec{V_2}=(a_2,b_2,c_2)\in\mathbb{R}^3$

מתקיים $\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}=\alpha(a_1,b_1,c_1)+\beta(a_2,b_2,c_2)=(\alpha a_1+\beta a_2,\alpha b_1+\beta b_2,\alpha c_1+\beta c_2)$

מכאן

$$T\left(\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\right)=T\left((\alpha a_1+\beta a_2,\alpha b_1+\beta b_2,\alpha c_1+\beta c_2)\right)=$$

$$=\left(\underbrace{(\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2)-(\alpha c_1+\beta c_2)}_{1st\ \ part},\underbrace{2(\alpha a_1+\beta a_2)+3(\alpha b_1+\beta b_2)+(\alpha c_1+\beta c_2)}_{2nd\ \ part}\right)=$$

$$=\alpha(a_1+b_1-c_1,2a_1+3b_1+c_1)+\beta(a_2+b_2-c_2,2a_2+3b_2+c_2)=\alpha T\left(\vec{V_1}\right)+\beta T\left(\vec{V_2}\right)$$

ולכן מדובר בהעתקה ליניארית.

3. יהי $V=\mathbb{R}_{\le 3}[X]$ (מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה ≤ 3)

יהי $W=\mathbb{R}_{\le 3}[X]$ נגדיר את ההעתקה $T:V\to W$ ע"י $\forall P\in\mathbb{R}_{\le 3}[X],T(P)=D(P)$

כאשר D היא פעולת הגזירה של הפולינום.

לדוגמא $D\left(3x^2-x^2+5x+7\right)=9x^2-2x+5$

העתקה הנ"ל היא העתקה ליניארית.

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? תעשו משהו טוב היום 😊

יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ו $p,q\in\mathbb{R}_{\le 3}[X]$

$p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$

אזי מתקיים

$$\begin{aligned}
&T(\alpha p+\beta q)=D(\alpha p+\beta q)=\\
&=D\left(\left(\alpha a_3+\beta b_3\right)x^3+\left(\alpha a_2+\beta b_2\right)x^2+\left(\alpha a_1+\beta b_1\right)x+\left(\alpha a_0+\beta b_0\right)\right)=\\
&=\left(\alpha a_3+\beta b_3\right)3x^2+\left(\alpha a_2+\beta b_2\right)2x+\left(\alpha a_1+\beta b_1\right)=\\
&=\alpha\left(a_3 3x^2+a_2 2x+a_1\right)+\beta\left(b_3 3x^2+b_2 2x+b_1\right)=\\
&=\alpha D(p)+\beta D(q)=\alpha T(p)+\beta T(q)
\end{aligned}$$

- העתקה ליניארית $T:V\to V$ נקראת גם אופרטור ליניארי.

<u>**טענה:**</u> אם $T:V\to W$ היא העתקה ליניארית אזי $T\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_W}$

הוכחה: מהליניאריות של T מתקיים $T\left(\overrightarrow{0_V}\right)=T\left(0*\overrightarrow{0_V}\right)=0*T\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_W}$

דוגמא: נגדיר העתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$T\left((a,b,c)\right)=\left(a+b-c,3a+2b+c+1\right)$

אזי T אינה העתקה ליניארית כיוון ש $T\left(\underbrace{(0,0,0)}_{=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}}\right)=(0,1)\neq\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}$

דוגמא נוספת:

נגדיר העתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י $T=\left((a,b,c)\right)=a^2+b^2+c^2$

אזי T אינה ליניארית. נשים לב לכך ש $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3\Rightarrow T\left((0,0,0)\right)=0\in\mathbb{R}$ אך בנוסף $T\left(\alpha(a,b,c)\right)=\alpha^2a^2+\alpha^2b^2+\alpha^2c^2=\alpha^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\alpha^2T\left((a,b,c)\right)$ ולכן T אינה ליניארית.

משפט – יחידות ההעתקה:

יהיו V ו W מרחבים וקטוריים מעל שדה F . יהי $\begin{matrix}\dim(V)=n\\ \dim(W)=m\end{matrix}$. יהי $B_V=\left\{\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_n}\right\}$ בסיס של V ותהי $Q=\left\{\vec{W_1},\vec{W_2},...,\vec{W_n}\right\}$ קבוצת וקטורים שרירותית בW. אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה $T:V\to W$ המקיימת $1\le i\le n$ $T\left(\vec{V_i}\right)=\vec{W_i}$.

הוכחה:

כיוון ש B_V הוא בסיס כל וקטור $\vec{V}\in V$ ניתן לביטוי בצורה $\vec{V}=\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_n\vec{V_n}$

עתה נגדיר העתקה $T:V\to W$ ע"י $T\left(\vec{V}\right):=\alpha_1\vec{W_1}+\alpha_2\vec{W_2}+...+\alpha_n\vec{W_n}$

נבדוק שהעתקה זו היא ליניארית. יהיו $a,b\in F$ ו $\vec{U_1},\vec{U_2}\in V$. כיוון ש B_V היא בסיס קיימים סקלארים $\alpha_i\in F$ $1\le i\le n$, $\beta_j\in F$ $1\le j\le n$ כך ש:

$$\vec{U_1}=\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_n\vec{V_n}$$
$$\vec{U_2}=\beta_1\vec{V_1}+\beta_2\vec{V_2}+...+\beta_n\vec{V_n}$$

מכאן ש:

$$a\vec{U_1}+b\vec{U_2}=a\left(\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+...+\alpha_n\vec{V_n}\right)+b\left(\beta_1\vec{V_1}+\beta_2\vec{V_2}+...+\beta_n\vec{V_n}\right)=$$
$$=\left(a\alpha_1+b\beta_1\right)\vec{V_1}+\left(a\alpha_2+b\beta_2\right)\vec{V_2}+...+\left(a\alpha_n+b\beta_n\right)\vec{V_n}$$

על כן

$$T\left(a\vec{U_1}+b\vec{U_2}\right)=T\left(a\alpha_1+b\beta_1\right)\vec{V_1}+T\left(a\alpha_2+b\beta_2\right)\vec{V_2}+...+T\left(a\alpha_n+b\beta_n\right)\vec{V_n}=$$
$$=\left(a\alpha_1+b\beta_1\right)\vec{W_1}+\left(a\alpha_2+b\beta_2\right)\vec{W_2}+...+\left(a\alpha_n+b\beta_n\right)\vec{W_n}=$$
$$=a\left(\alpha_1\vec{W_1}+...+\alpha_n\vec{W_n}\right)+b\left(\beta_1\vec{W_1}+...+\beta_n\vec{W_n}\right)=aT\left(\vec{U_1}\right)+bT\left(\vec{U_2}\right)$$

כלומר T העתקה ליניארית. בנוסף נשים לב לכך ש $\begin{matrix}T\left(\vec{V_i}\right)=\vec{W_i}\\ 1\le i\le n\end{matrix}$

נותר לנו להראות יחידות.

נניח בשלילה שקיימת העתקה ליניארית נוספת $S:V\to W$ $S\neq T$ המקיימת $1\le i\le n, S\left(\vec{V_i}\right)=\vec{W_i}$

במקרה זה מתקיים

$$\vec{V}=\alpha_1\vec{V_1}+...+\alpha_n\vec{V_n}=T\left(\vec{V}\right)=\alpha_1\vec{W_1}+...+\alpha_n\vec{W_n}=$$
$$=\alpha_1S\left(\vec{V_1}\right)+...+\alpha_nS\left(\vec{V_n}\right)=S\left(\alpha_1\vec{V_1}+...+\alpha_n\vec{V_n}\right)=S\left(\vec{V}\right)$$

כיוון ש $\vec{V}$ הוא וקטור שרירותי נקבל ש $S=T$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? תעשו משהו טוב היום 😊

גרעין ותמונה של העתקה ליניארית:

הגדרה- גרעין של העתקה ליניארית:

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. הגרעין של העתקה T מסומן $Ker\left(T\right)$ ומוגדר להיות

$$Ker\left(T\right)=\left\{\vec{V}\in V:T\left(\vec{V}\right)=\overrightarrow{0_W}\right\}$$

הגדרה – תמונה של העתקה ליניארית:

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. התמונה של העתקה T מסומנת $\operatorname{Im}\left(T\right)$ (או $\operatorname{Im}age\left(T\right)$)

ומוגדרת להיות $\operatorname{Im}\left(T\right)=\left\{\vec{W}\in W:\exists\vec{V}\in V,T\left(\vec{V}\right)=\vec{W}\right\}=\left\{T\left(\vec{V}\right):\vec{V}\in V\right\}$

(במילים נעימות: הגרעין הוא קבוצה של וקטורים מV שכשמבצעים עליהם T הופכים לוקטור האפס של W. התמונה של ההעתקה היא קבוצה של וקטורים ב W שמתקבלים כתוצאה מביצוע T על וקטורים ב V)

טענה:

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. אזי $Ker\left(T\right)$ הוא תת מרחב של V ו $\operatorname{Im}\left(T\right)$ הוא תת-מרחב של W.

הוכחה:

ראשית נראה ש $Ker\left(T\right)\subseteq V$ הוא תת-מרחב.

1. כיוון ש $T\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_w}$ בהכרח $\overrightarrow{0_V}\in Ker\left(T\right)$
2. יהיו $\alpha,\beta\in F$ ו $\vec{V_1},\vec{V_2}\in Ker\left(T\right)$. עלינו להראות ש $\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\in Ker\left(T\right)$

   מתקיים
   $$T\left(\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\right)=\alpha T\left(\vec{V_1}\right)+\beta T\left(\vec{V_2}\right)=\alpha\overrightarrow{0_w}+\beta\overrightarrow{0_w}=\overrightarrow{0_w}$$
   $$\Rightarrow\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\in Ker\left(T\right)$$

עתה נראה ש $\operatorname{Im}\left(T\right)\subseteq W$ היא תת-מרחב.

1. כיוון ש $T\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_W}$ מתקיים $\overrightarrow{0_W}\in\operatorname{Im}\left(T\right)$
2. יהיו $\alpha,\beta\in F$ ו $\vec{W_1},\vec{W_2}\in\operatorname{Im}\left(T\right)$ מכאן שקיימים וקטורים $\vec{V_1},\vec{V_2}\in V$ כך ש

   $T\left(\vec{V_1}\right)=\vec{W_1},T\left(\vec{V_2}\right)=\vec{W_2}$ על כן
   $$\alpha\vec{W_1}+\beta\vec{W_2}=\alpha T\left(\vec{V_1}\right)+\beta T\left(\vec{V_2}\right)=$$
   $$=T\left(\alpha\vec{V_1}+\beta\vec{V_2}\right)\Rightarrow\alpha\vec{W_1}+\beta\vec{W_2}\in\operatorname{Im}\left(T\right)$$

   מכאן ש $\operatorname{Im}\left(T\right)$ תת מרחב של W.

טענה:

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. אזי T היא חח"ע אם ורק אם $Ker\left(T\right)=\left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$.

הוכחה:

כיוון אחד: נניח ש T חח"ע. אנו יודעים ש $T\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_W}$. מחח"ע של T לא קיים וקטור נוסף $\vec{V}\neq\overrightarrow{0_V}$ כך ש $T\left(\vec{V}\right)=\overrightarrow{0_V}$. מכאן ש $Ker\left(T\right)=\left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$.

כיוון הפוך: נניח ש $Ker\left(T\right)=\left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$. יהיו $\vec{V_1},\vec{V_2}\in V$ וקטורים כך ש $T\left(\vec{V_1}\right)=T\left(\vec{V_2}\right)$. מתקיים

$$T\left(\vec{V_1}\right)=T\left(\vec{V_2}\right)\Rightarrow T\left(\vec{V_1}\right)-T\left(\vec{V_2}\right)=\overrightarrow{0_W}$$

$$\Rightarrow T\left(\vec{V_1}-\vec{V_2}\right)=\overrightarrow{0_W}\Rightarrow\vec{V_1}-\vec{V_2}=\overrightarrow{0_V}\Rightarrow\vec{V_1}=\vec{V_2}$$

לכן T היא חח"ע.

משפט המימדים השני – משפט מימדים להעתקות ליניאריות:

תהי $T:V\rightarrow W$ העתקה ליניארית. אזי מתקיים: $\dim\left(Ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(V\right)$

(המימד של הגרעין + המימד של התמונה של ההעתקה = למימד של המרחב ממנו ההעתקה יוצאת)

הוכחה:

נניח ש $\dim\left(V\right)=n$ ו $\dim\left(Ker\left(T\right)\right)=m\leq n$.

יהי $B_{Ker(T)}=\left\{\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_m}\right\}$ נשלים את הבסיס הנ"ל לבסיס של V

$$B_V=\left\{\overbrace{\vec{V_1},\vec{V_2},...,\vec{V_m}}^{B_{\ker(T)}},\overrightarrow{V_{m+1}},...,\vec{V_n}\right\}$$

נסמן $T\left(\overrightarrow{V_{m+1}}\right)=\overrightarrow{W_{m+1}},...,T\left(\vec{V_n}\right)=\vec{W_n}$

טענה: $B_{\operatorname{Im}(T)}=\left\{\overrightarrow{W_{m+1}},\overrightarrow{W_{m+2}},...,\vec{W_n}\right\}$ היא בסיס של $\operatorname{Im}\left(T\right)$. ראשית נראה ש $B_{\operatorname{Im}(T)}$ פורשת את $\operatorname{Im}\left(T\right)$. יהי $\vec{W}\in\operatorname{Im}\left(T\right)$ וקטור שרירותי. מכאן שקיים וקטור $\vec{V}\in V$ כך ש $T\left(\vec{V}\right)=\vec{W}$. כיוון ש B_V הוא בסיס של V קיימים סקלאריים $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$ כך ש

$$\vec{V}=\alpha_1\vec{V_1}+...+\alpha_m\vec{V_m}+\alpha_{m+1}\overrightarrow{V_{m+1}}+...+\alpha_n\vec{V_n}$$

נפעיל את T ונקבל

$$\vec{W}=T\left(\vec{V}\right)=T\left(\alpha_1\vec{V_1}+...+\alpha_m\vec{V_m}+\alpha_{m+1}\overrightarrow{V_{m+1}}+...+\alpha_n\vec{V_n}\right)=$$

$$\alpha_1\underbrace{T\left(\vec{V_1}\right)}_{=\vec{0}}+...+\alpha_m\underbrace{T\left(\vec{V_m}\right)}_{=\vec{0}}+\alpha_{m+1}\underbrace{T\left(\overrightarrow{V_{m+1}}\right)}_{=\vec{W_m}}+...+\alpha_n\underbrace{T\left(\vec{V_n}\right)}_{=\vec{W_n}}=$$

$$=\alpha_{m+1}\overrightarrow{W_{m+1}}+...+\alpha_n\vec{W_n}$$

לכן $Span\left(B_{\operatorname{Im}(T)}\right)=\operatorname{Im}(T)$. עתה נראה ש $B_{\operatorname{Im}(T)}$ היא בת"ל. נניח בשלילה שקבוצה זו תלויה ליניארית. במקרה זה קיימים סקלארים $\beta_{m+1},...,\beta_n \in F$ שאינם כולם אפס כך ש

$$\beta_{m+1}\overrightarrow{W_{m+1}}+...+\beta_n\overrightarrow{W_n}=\overrightarrow{0_W}$$

$$\Rightarrow \beta_{m+1}T\left(\overrightarrow{V_{m+1}}\right)+...+\beta_nT\left(\overrightarrow{V_n}\right)=\overrightarrow{0_W}$$

$$\Rightarrow T\left(\underbrace{\beta_{m+1}\left(\overrightarrow{V_{m+1}}\right)+...+\beta_n\left(\overrightarrow{V_n}\right)}_{\in Ker(T)}\right)=\overrightarrow{0_W}$$

מכאן שקיימים סקלאריים $\beta_1,...,\beta_m$ כך ש

$$\left(\beta_{m+1}\overrightarrow{V_{m+1}}+...+\beta_n\overrightarrow{V_n}\right)=\beta_1\overrightarrow{V_1}+...+\beta_m\overrightarrow{V_m}$$
$$\in Ker(T)$$
$$\Rightarrow$$
$$-\beta_1\overrightarrow{V_1}-...-\beta_m\overrightarrow{V_m}+\beta_{m+1}\overrightarrow{V_{m+1}}+...+\beta_n\overrightarrow{V_n}=\overrightarrow{0_{\vec{V}}}$$

כיוון ש B_V היא בסיס של V נקבל ש $\beta_1=\beta_2=...=\beta_{m+1}=...=\beta_n=0$

על כן $B_{\operatorname{Im}(T)}$ היא בת"ל ומכאן שהיא בסיס של $\operatorname{Im}(T)$. נותר לנו רק לספור וקטורים

$$\dim(V)=n=m+(n-m)=\dim\left(\ker(T)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}(T)\right)$$

<u>מסקנה:</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. נניח ש$\dim(W)<\dim(V)$ אזי T אינה חח"ע

הוכחה: מיידי, כיוון ש $\dim\left(\ker(T)\right)=\dim(V)-\dim\left(\operatorname{Im}(T)\right)\geq\dim(V)-\dim(W)>0$

Rotem S

אלגברה ליניארית שיעור 11

<u>העתקות ליניאריות – המשך:</u>

<u>הגדרה – איזומורפיזם:</u>

העתקה ליניארית $T:V\to W$ נקראת איזומורפיזם אם היא חח"ע ועל (פונקציה הפיכה וליניארית היא איזומורפיזם).

במקרה זה המרחבים הוקטוריים V ו W נקראים איזומורפים.

אם T הוא איזומורפיזם אזי, כיוון ש T חח"ע ו"על" ההעתקה $T^{-1}:W\to V$ מוגדרת היטב.

<u>טענה:</u>

אם $T:V\to W$ היא איזומורפיזם אזי $T^{-1}:W\to V$ היא איזומורפיזם.

<u>הוכחה:</u>

בבירור, T^{-1} היא חח"ע ועל. נותר לנו להראות ש T^{-1} היא העתקה ליניארית. כלומר – עלינו להראות ש $\forall\alpha,\beta\in F,\forall\vec{w_1},\vec{w_2}\in W$ מתקיים $T^{-1}\left(\alpha\vec{w_1}+\beta\vec{w_2}\right)=\alpha T^{-1}\left(\vec{w_1}\right)+\beta T^{-1}\left(\vec{w_2}\right)$.

קיימים $\vec{v_1},\vec{v_2}\in V$ כך ש $T\left(\vec{v_1}\right)=\vec{w_1},\quad T\left(\vec{v_2}\right)=\vec{w_2}$ לכן מתקיים

$$T\left(\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}\right)=\alpha T\left(\vec{v_1}\right)+\beta T\left(\vec{v_2}\right)=\alpha\vec{w_1}+\beta\vec{w_2}\Rightarrow$$
$$T^{-1}\left(\alpha\vec{w_1}+\beta\vec{w_2}\right)=T^{-1}\left(T\left(\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}\right)\right)=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}=\alpha T^{-1}\vec{w_1}+\beta T^{-1}\vec{w_2}$$

ולכן T^{-1}ליניארית.

<u>משפט:</u>

יהי $T:V\to W$ איזומורפיזם. נניח ש $\dim(V)=n$. תהי $S_1=\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_m}\right\}$ קבוצה של וקטורים בV. נסמן $W_i=T\left\{\vec{V_i}\right\}$ $1\le i\le m$. נסמן $S_2=\left\{\vec{w_1},\vec{w_2},...,\vec{w_m}\right\}$ אזי מתקיים.

א. S_1 היא בת"ל בV אם ורק אם S_2 היא בת"ל בW.
ב. S_1 פורשת את V אם ורק אם S_2 פורשת את W.
ג. S_1 היא בסיס של V אם ורק אם S_2 היא בסיס בW.

<u>הוכחה:</u>

א. נניח ש S_1 היא בת"ל. נניח ש $\alpha_1\vec{w_1}+\alpha_2\vec{w_2}+...+\alpha_m\vec{w_m}=\vec{0_w}$. נפעיל את T^{-1} ונקבל

$$T^{-1}\left(\alpha_1\vec{w_1}+\alpha_2\vec{w_2}+...+\alpha_m\vec{w_m}\right)=T^{-1}\left(\vec{0_w}\right)=\vec{0_v}$$
$$\Rightarrow\alpha_1T^{-1}\left(\vec{w_1}\right)+\alpha_2T^{-1}\left(\vec{w_2}\right)+...+\alpha_mT^{-1}\left(\vec{w_m}\right)=\vec{0_v}$$
$$\Rightarrow\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_m\vec{v_m}=\vec{0_v}$$

כיוון ש S_1 בת"ל בהכרח $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=0$. מכאן ש S_2 בת"ל. ההוכחה בכיוון ההפוך היא דומה.

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? תקופת מבחנים בפתח ואשמח לעזרה בשאלות בעת צרה ^_^

ב. נניח ש S_1 פורשת את V. יהי $\vec{w}\in W$ וקטור שרירותי. נפעיל את T^{-1} ונקבל וקטור $\vec{v}=T^{-1}\left(\vec{w}\right)$ כך ש $\vec{w}=T\left(\vec{v}\right)$. כיוון ש S_1 פורשת קיימים סקלארים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ כך ש $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_m\vec{v_m}$. נפעיל את T ונקבל

$$\vec{w}=T\left(\vec{v}\right)=T\left(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_m\vec{v_m}\right)=\alpha_1\vec{w_1}+\alpha_2\vec{w_2}+...+\alpha_m\vec{w_m}$$

מכאן ש S_2 פורשת את W. ההוכחה בכיוון ההפוך דומה.

ג. נובע במיידי מא' וב'

<u>מסקנה:</u> אם V ו W איזומורפיים אזי $\dim\left(W\right)=\dim\left(V\right)$.

<u>דוגמא:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F כלשהו. נניח ש $\dim\left(V\right)=n$. יהי $B_V=\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_n}\right\}$ בסיס של V. כיוון ש B_V הוא בסיס של V לכל וקטור $\vec{v}\in V$ קיימת קבוצת סקלארים יחידה $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$ כך ש $\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_n\vec{v_n}=\vec{v}$. עתה נגדיר העתקה $T:V\to F^n$ בצורה הבאה: $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_n\vec{v_n}$ $T\left(\vec{v}\right)=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in F^n$.

<u>טענה:</u> העתקה T היא איזומורפיזם.

<u>הוכחה:</u> בבירור, T היא חח"ע ועל. נראה ש T ליניארית.

יהיו $\vec{v},\vec{u}\in V$ וקטורים שרירותיים. כיוון ש B_V היא בסיס נוכל לרשום באופן יחיד

$\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_n\vec{v_n}$
$\vec{u}=\beta_1\vec{u_1}+\beta_2\vec{u_2}+...+\beta_n\vec{u_n}$ יהיו $a,b\in F$.

אזי מתקיים

$$T\left(a\vec{v}+b\vec{v}\right)=T\left(a\left(\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+...+\alpha_n\vec{v_n}\right)+b\left(\beta_1\vec{u_1}+\beta_2\vec{u_2}+...+\beta_n\vec{u_n}\right)\right)=$$

$$=T\left(\left(a\alpha_1+b\beta_1\right)\vec{v_1}+...+\left(a\alpha_n+b\beta_n\right)\vec{v_n}\right)=\begin{bmatrix}a\alpha_1+b\beta_1\\ \vdots\\ a\alpha_n+b\beta_n\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=aT\left(\vec{v}\right)+bT\left(\vec{u}\right)$$

מכאן ש T היא איזומורפיזם.

- **<u>הערה:</u>** את הוקטור $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$ מהדוגמא אנו מסמנים ב $\left[\vec{v}\right]_{B_V}$ ואומרים ש $\left[\vec{v}\right]_{B_V}$ הוא וקטור הקורדינאטות ש $\vec{v}$ ביחס לבסיס B_V.

<u>מטריצה מיידית של העתקה ליניארית:</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. נניח ש $\dim(W)=m$, $\dim(V)=n$. יהיו $B_W=\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},...,\overrightarrow{w_m}\}$, $B_V=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_n}\}$ בסיסים של V ושל W בהתאמה.

נפעיל את T על וקטורי הבסיס ב B_V ונקבל $T(\overrightarrow{v_i})=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\overrightarrow{w_j}$, $1\le i\le n$

יהי $\vec{v}\in V$ וקטור שרירותי. נפתח את $\vec{v}$ לפי הבסיס B_V

$$\vec{v}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{v_n},\quad \vec{v}\to\left[\vec{v}\right]_{B_V}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}\in F^n$$

מכאן נקבל

$$T(\vec{v})=T\left(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{v_n}\right)=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{v_i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(\overrightarrow{v_i})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\overrightarrow{w_j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\alpha_i\right)}_{\beta_j}\overrightarrow{w_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\overrightarrow{w_j}\Rightarrow\left(\left[T(\vec{v})\right]_{B_W}\right)_j=\beta_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\left(\left[\vec{v}\right]_{B_V}\right)_i=$$

$$=\left(\left[T(\vec{v})\right]_{B_W}\right)_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\left(\left[\vec{v}\right]_{B_V}\right)_i$$

עתה נבנה מטריצה $\left([T]_{B_W}^{B_V}\right)_{ij}=a_{ij}$ ונוכל לרשום $\left[T(\vec{v})\right]_{B_W}=[T]_{B_W}^{B_V}\left[\vec{v}\right]_{B_V}$

המטריצה $[T]_{B_W}^{B_V}$ נקראת המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים B_V ו B_W

את תהליך הבנייה של המטריצה המייצגת $[T]_{B_W}^{B_V}$ אנו מסיקים מהנוסחאות הבאות:

$$\left([T]_{B_W}^{B_V}\right)_{ij}=a_{ij},\quad T(\vec{v_i})\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\overrightarrow{w_j},\quad 1\le i\le n$$

<u>דוגמא:</u>

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T((a,b,c))=(a+b-c,2a+3b+c)$

יהי $B_{\mathbb{R}^3}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ הבסיס הסטנדרטי ב $\mathbb{R}^3$. יהי $B_{\mathbb{R}^2}=\{(1,1),(1,-1)\}$ בסיס ב $\mathbb{R}^2$

נרצה למצוא את המטריצה המייצגת $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$.

<u>פתרון:</u>

נפעיל את T בזה אחר זה על וקטורי הבסיס של $B_{\mathbb{R}^3}$:

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? תקופת מבחנים בפתח ואשמח לעזרה בשאלות בעת צרה ^_^

$$T\left((1,0,0)\right)=(1,2)=a_{11}(1,1)+a_{2,1}(1,-1)\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow[dirug]{R_1-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&2&-1\end{array}\right)\Rightarrow a_{21}=\frac{-1}{2},a_{11}+a_{21}=1\Rightarrow a_{11}=\frac{3}{2}$$

$$T\left((0,1,0)\right)=(1,3)=a_{12}(1,1)+a_{22}(1,-1)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[dirug]{after}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&2&-2\end{array}\right)\Rightarrow a_{22}=-1,a_{12}=2$$

$$T\left((0,0,1)\right)=(-1,1)=a_{13}(1,1)+a_{23}(1,-1)\Rightarrow a_{13}=0,a_{23}=-1$$

מכאן שהמטריצה המייצגת היא : $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&2&0\\\frac{-1}{2}&-1&-1\end{bmatrix}$

<u>דוגמא:</u>

במרחב המטריצות $V=M_{2\times2}(\mathbb{R})$ נגדיר את ההעתקה הליניארית $T(A)=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$, $A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

א. נמצא מטריצה מייצגת $[T]_E^E$ של T ביחס לבסיס הסטנדרטי

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ב. נעשה שימוש במטריצה המייצגת הנ"ל כדי למצוא את $Ker(T)$ ואת $\operatorname{Im}(T)$

<u>פתרון:</u>

א. מתקיים

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1*\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=0*\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}*\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}*\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=0*\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}*\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}*\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=0*\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1*\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

מכאן $[T]_E^E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

לדוגמא:

$$T(A)=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&3\\-2&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\3&5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&5\end{pmatrix}\Leftarrow\ A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&5\end{pmatrix}$$

נבנה את וקטור הקורדינטות:

$$A=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow[A]_E^E=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\5\end{bmatrix}$$

$$\left[T(A)\right]_E=[T]_E^E[A]_E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\5\end{bmatrix}$$

ולכן $T(A)=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&5\end{pmatrix}$

ב. הגרעין של המטריצה היא מרחב הפתרונות של הממ"ל ההומוגנית

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{dirug}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1=\alpha_4=0\\-\alpha_2=\alpha_3=t\end{pmatrix}$$

מכאן שפתרון המערכת ההומוגנית $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

מכאן נקבל ש

$$Ker(T)=\left\{0*\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-t)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0*\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}$$

מרחב העמודות של המטריצה מהווה התמונה של ההעתקה. (יוסבר שוב בסוף השיעור)

<u>מטריצת מעבר בסיס:</u>

- על המרחב הוקטורי V נגדיר את העתקת הזהות $I:V\to V$ כך ש $\forall\vec{v}\in V, I(\vec{v})=\vec{v}$

יהיו B_1 ו B_2 שני בסיסים של V. אזי המטריצה המייצגת $[I]_{B_1}^{B_2}$ נקראת מטריצת מעבר בסיס מ B_1 ל B_2.

<u>דוגמא</u>:

ב $\mathbb{R}^2$, ניקח שני בסיסים $E=\{(1,0),(0,1)\},\quad B=\{(1,1),(1,-1)\}$

נמצא את מטריצת מעבר הבסיס מB לE.

<u>פתרון:</u>

$$\left.\begin{array}{l}I((1,1))=(1,1)=1*(1,0)+1*(0,1)\\ I((1,-1))=(1,-1)=1*(1,0)+(-1)*(0,-1)\end{array}\right\}[I]_E^B=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

נשים לב לדבר הבא $(\dim(V)=n)$: אם יש לנו שני בסיסים (B_1 , B_2) ומצאנו את מטריצת המעבר $[I]_{B_2}^{B_1}$ מ B_1 ל B_2 , מטריצת המעבר $[I]_{B_1}^{B_2}$ מ B_2 ל B_1 תהיה המטריצה ההופכית למטריצת המעבר כך ש $[I]_{B_2}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}=I_{n\times n}$

אם אני רוצה לעבור בין מטריצות מעבר מבסיסים בין בסיסים (?)

$$[T]_{B_2}^{B_2}=[I]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}=\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}[T]_{B_1}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}$$

אלגברה ליניארית 12:

העתקות ליניאריות – סיום:

תזכורת: מטריצת מעבר בסיס.

בהינתן מרחב וקטורי V ובסיסים B_1 ו B_2 נגדיר את מטריצת מעבר הבסיס מהבסיס B_1 לבסיס B_2 להיות $[I]_{B_2}^{B_1}$ כאשר $I:V\to V$ הוא אופרטור הזהות המוגדר ע"י $I\left(\vec{V}\right)=\vec{V}$ לכל $\vec{v}\in V$.

בהינתן וקטור הקורדינטות $\left[\vec{v}\right]_{B_1}$ מתקיים $\left[\vec{v}\right]_{B_2}=[I]_{B_2}^{B_1}\left[\vec{v}\right]_{B_1}$

- נניח ש $T:V\to W$ היא העתקה ליניארית. יהיו B_1 ו B_2 בסיסים ב V ו B_1 ו B_2 בסיסים בW. נניח שנתונה המטריצה המייצרת $[T]_{B_1}^{B_1}$ כך ש $\left[T\left(\vec{v}\right)\right]_{B_1}=[T]_{B_1}^{B_1}\left[\vec{v}\right]_{B_1}$

נרצה למצוא את המטריצה המייצגת $[T]_{B_2}^{B_2}$. מתקיים: $[T]_{B_2}^{B_2}=[I]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}$

בפרט, אם $T:V\to V$ הוא אופרטור ליניארי אזי $[T]_{B_2}^{B_1}=[I]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}[I]_{B_1}^{B_2}$

וכיוון ש $[I]_{B_2}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}=[I]_{B_2}^{B_2}=In\Rightarrow[I]_{B_2}^{B_1}=\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$ נקבל $[T]_{B_2}^{B_2}=\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}[T]_{B_1}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}$

הגדרה: מטריצות דומות:

מטריצות $A,B\in M_{n\times n}(F)$ תקראנה מטריצות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $B=P^{-1}AP$

- לכן המטריצות המייצגות של אופרטור $T:V\to V$ ביחס לבסיסים שונים B_1 ו B_2 הן מטריצות דומות.

פעולות על העתקות ומטריצות מייצגות מתאימות:

יהיו $\begin{matrix}T_1:V\to W\\T_2:V\to W\end{matrix}$ העתקות ליניאריות.

- הסכום T_1+T_2 הוא ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י $(T_1+T_2)\left(\vec{v}\right):=T_1\left(\vec{v}\right)+T_2\left(\vec{v}\right)$.
- יהי $\alpha\in F$. המכפלה αT_1 היא העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $(\alpha T_1)\left(\vec{v}\right):=\alpha T_1\left(\vec{v}\right)$
- יהיו $\begin{matrix}T_1:V\to W\\T_2:W\to U\end{matrix}$ העתקות ליניאריות. אזי ההרכבה $T_2\circ T_1:V\to U$ היא העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $(T_2\circ T_1)\left(\vec{v}\right)=T_2\left(T_1\left(\vec{v}\right)\right)$
- יהיו B_V ו B_W בסיסים ב V ו W בהתאמה. אזי $[T_1+T_2]_{B_W}^{B_V}=[T_1]_{B_W}^{B_V}+[T_2]_{B_w}^{B_V}$
- יהי $\alpha\in F$. אזי $[\alpha T]_{B_W}^{B_V}=\alpha[T]_{B_W}^{B_V}$.
- יהיו B_V,B_W ו B_U בסיסים ב V, W ו U בהתאמה. אזי: $[T_2\circ T_1]_{B_U}^{B_V}=[T_2]_{B_U}^{B_W}[T_1]_{B_W}^{B_V}$

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? בואו לטפס איתי בימי רביעי

דטרמיננטות:

הגדרה – דטרמיננטה:

תהי $A\in M_{n\times n}(F)$. נסמן את שורותיה של A ב $\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_n}\in F^n$. הדטרמיננטה של A מסומנת ב $\det(A)\equiv|A|$ ומוגדרת ע"י $\det(A)\equiv D\left(\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_n}\right)$ כאשר

$D:\overbrace{F^n\times F^n\times...\times F^n}^{n}\to F$ (מכפלה קרטזית) היא פונקציה המקיימת:

1. D היא מולטי ליניארית
$$D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\alpha\vec{v}+\beta\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)=\alpha D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)+\beta D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)$$
מולטי ליניארית = לא משנה איזה וקטור נבחר (מקום j) נשים צירוף ליניארי והתכונה תישמר בצורה שמופיעה במשוואה.
2. D היא מתחלפת
$$D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)=0$$
3. D היא מנורמלת
$D\left(e_1,e_2,...,e_n\right)=1$ כאשר $e_i=\left(0,0,...,\underset{i\ place}{1},0,0,...,0\right)$

(בעברית: דטרמיננטה היא פונקציה שלוקחת מטריצה ריבועית ומוציאה סקלאר)

דוגמא:

$$D\left(\alpha(1,2)+\beta(3,4),\gamma(5,6)+\delta(7,8)\right)=\alpha D\left((1,2),\gamma(5,6)+\delta(7,8)\right)+\beta D\left((3,4),\gamma(5,6)+\delta(7,8)\right)=$$
$$=\alpha\left[\gamma D\left((1,2),(5,6)\right)+\delta D\left((1,2),(7,8)\right)\right]+\beta\left[\gamma D\left((3,4),(5,6)\right)+\delta D\left((3,4),(7,8)\right)\right]=$$
$$=\alpha\gamma D\left((1,2),(5,6)\right)+\alpha\delta D\left((1,2),(7,8)\right)+\beta\gamma D\left((3,4),(5,6)\right)+\beta\delta D\left((3,4),(7,8)\right)$$

<u>מתכונה 2 של הדטרמיננטה</u> נקבל :

$$D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)=0$$
$$D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{v}+\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)+D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},\vec{v}+\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)=$$
$$D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)+D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)+D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)$$

מאקסיומת הבסיס כאשר ישנם שני וקטורים זהים הדטטרמיננטה שווה לאפס

$$\underbrace{D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)}_{=0}+D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)+\underbrace{D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{v},\vec{w},...,\overrightarrow{v_n}\right)=-D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\vec{w},\vec{v},...,\overrightarrow{v_n}\right)$$

קיבלנו את התכונה הבאה: אם מטריצה A' מתקבלת מA ע"י החלפת שתי שורות סמוכות זו בזו אזי הדטרמיננטה מחליפה סימן.

$$\det(A') = -\det(A)$$

נשים לב לכך ש :

$$D\left(\vec{v_1},\vec{v_2},...,\underset{k\ place}{\vec{v}},...,\underset{j\ place}{\overrightarrow{w}},...,\vec{v_n}\right) = (-1)^m D\left(\vec{v_1},\vec{v_2},...,\underset{k\ place}{\vec{v}},\underset{k+1\ place}{\vec{w}},...,...,\vec{v_n}\right) =$$

$$= (-1)^{m+1} D\left(\vec{v_1},\vec{v_2},...,\underset{k\ place}{\vec{w}},\underset{k+1\ place}{\vec{v}},...,...,\vec{v_n}\right) = (-1)^{2m+1} D\left(\vec{v_1},\vec{v_2},...,\underbrace{\vec{w}}_{k\ place},...,\underbrace{\overrightarrow{v}}_{j\ place},...,\vec{v_n}\right)$$

<u>מסקנות:</u>

- המטריצה A' מתקבלת מA ע"י הפעולה האלמנטרית $R_i \leftrightarrow R_j$
  אזי $\det(A') = -\det(A)$
- אם בA יש שתי שורות זהות (לא משנה מיקומן!)
  אזי $\det(A) = 0$
- אם המטריצה A' מתקבלת מA ע"י הפעולה $\alpha R_i \to R_i$
  אזי מתקיים $\det(A') = \alpha \det(A)$
- אם $\alpha \in F$ ו $A' = \alpha A$
  אזי $A \in M_{n\times n}(F)$, $\det(A') = \alpha^n \det(A)$
  $$D\left(\alpha\overrightarrow{R_1},\alpha\overrightarrow{R_2},...,\alpha\overrightarrow{R_n}\right) = \underbrace{\alpha*\alpha*...*\alpha}_{\alpha^n} D\left(\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_n}\right)$$
- נניח ש A' מתקבלת מA ע"י פעולת השורה $R_i + \alpha R_j \to R_i$. במקרה זה מתקיים
  $\det(A') = \det(A)$

זאת כיוון ש

$$\det(A') = D\left(\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\underbrace{\overrightarrow{R_i}+\alpha\overrightarrow{R_j}}_{i\ place},...,\overrightarrow{R_j},...\overrightarrow{R_n}\right) =$$

$$D\left(\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_i},...,\overrightarrow{R_j},...\overrightarrow{R_n}\right) + \underbrace{\alpha D\left(\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_2},...,\overrightarrow{R_j},...,\overrightarrow{R_j},...\overrightarrow{R_n}\right)}_{=0} = \det(A)$$

<u>סיכום ביניים:</u>

תהי $A \in M_{n\times n}(F)$.

1. אם בA יש שתי שורות זהות אזי $\det(A) = 0$
2. יהי $\alpha \in F$ אזי $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
3. אם A' מתקבלת מA ע"י פעולת השורה $R_i \leftrightarrow R_j$ אזי $\det(A') = -\det(A)$
4. אם A' מתקבלת מA ע"י פעולת השורה $\alpha R_i \to R_i$ אזי $\det(A') = \alpha \det(A)$
5. אם A' מתקבלת מ A ע"י פעולת השורה $R_i + \alpha R_j \to R_i$ $(i \neq j)$ אזי $\det(A') = \det(A)$

נסמן ב $E^1_{i,j}$ את המטריצה האלמנטרית המתאימה להחלפת השורות $R_i \leftrightarrow R_j$.

(E^1 פעולות שורה מהסוג הראשון, החלפת שורות)

$E^2_{\alpha,i}$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולת השורה $\alpha R_i \to R_i$

(E^2 פעולות שורה מהסוג השני, הכפלה בסקלאר)

$E^3_{\alpha,i,j}$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה $R_i + \alpha R_j \to R_i$

(E^3 פעולת שורה מהסוג השלישי)

מכאן שאת התכונות 3-5 של הדטרמיננטה ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$\det\left(E^1_{i,j}A\right) = -\det(A)$$

$$\det\left(E^2_{\alpha,i}A\right) = \alpha\det(A)$$

$$\det\left(E^3_{\alpha,i,j}A\right) = \det(A)$$

בפרט, אם $A = I_n$ נקבל

$$\det\left(E^1_{i,j}\right) = -1$$
$$\det\left(E^2_{\alpha,i}\right) = \alpha$$
$$\det\left(E^3_{\alpha,i,j}\right) = 1$$

<u>**מסקנה:**</u> אם E מטריצה אלמנטרית אזי $\det(EA) = \det(E) * \det(A)$

<u>**טענה:**</u> מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ היא הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$.

<u>**הוכחה:**</u>

כיוון אחד: נניח ש A הפיכה. במקרה זה A שקולת שורה למטריצת היחידה וקיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, E_2, ..., E_k$ כך ש $I_n = E_k * ... * E_2 * E_1 * A$

מכאן נקבל:

$$1 = \det(I_n) = \det\left(E_k \overbrace{* ... * E_2 * E_1 * A}^{B}\right) = \det(E_k)\det\left(E_{k-1}\overbrace{* ... * E_2 * E_1 * A}\right) = again\ and\ again =$$

$$= \underbrace{\det(E_k)}_{\neq 0}\underbrace{\det(E_{k-1})}_{\neq 0} * ... * \underbrace{\det(E_1)}_{\neq 0}\det(A) \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

בכיוון ההפוך:

נרצה להוכיח שאם $\det(A) \neq 0$ אזי A הפיכה. לשם כך נוכיח שאם A אינה הפיכה אזי בהכרח $\det(A) = 0$.

נניח ש A אינה הפיכה. אזי ב A' ישנה לפחות שורת אפסים אחת. נניח ש $\overrightarrow{R_i} = \vec{0}$

במקרה זה מתקיים

רוצים לעזור בכתיבת סיכומים? בואו לטפס איתי בימי רביעי

$$\det(A') = \det\left(E_{\alpha,i}^2 A'\right) = \alpha \det(A') \Rightarrow (\alpha - 1)\det(A') = 0$$

ואם $\alpha \neq 1$ נקבל ש $\det(A') = 0$. מכאן נסיק ש $\det(A) = 0$.

<u>טענה נוספת:</u>

בעבור $A, B \in M_{n\times n}(F)$ מתקיים $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

<u>הוכחה:</u>

אם AB אינה הפיכה אזי $\det(AB) = 0$ ובנוסף A או B אינה הפיכה ואגף ימין מתאפס.

אם A הפיכה , קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, E_2, ..., E_k$ כך ש $A = E_1 * E_2 * ... * E_k$

במקרה זה נקבל

$$\det(AB) = \det(E_1 * E_2 * ... * E_k * B) = \left[\det(E_1) * \det(E_2) * ... * \det(E_k)\right] * \det(B) =$$
$$= \det(E_1 * E_2 * ... * E_k) * \det(B) = \det(A) * \det(B)$$

- בפרט, אם A הפיכה נקבל
$$A * A^{-1} = I_n \Rightarrow \det\left(A * A^{-1}\right) = \det(I_n)$$
$$\Rightarrow \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1 \Rightarrow \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Rotems

<u>אלגברה ליניארית -שיעור 13 ואחרון</u>

<u>דטרמיננטות – המשך:</u>

תכונה נוספת של דטרמיננטה $\det\left(A^T\right)=\det\left(A\right)$

<u>חישוב דטרמיננטה:</u>

<u>דרך א:</u>

<u>טענה:</u> אם A היא מטריצה משולשת עליונה (או תחתונה) [תזכורת: מטריצה ריבועית $A=\left(a_{i,j}\right)$

היא מטריצה משולשת עליונה אם מתקיים $a_{i,j}=0,\ i>j$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ [

$$\det\left(A\right)=a_{11}*a_{22}*\dots*a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

<u>הוכחה:</u>

תהי $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה. אם אחד או יותר מהאיברים

$a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ הוא אפס אזי הצורה הקאנונית A' של A היא מטריצה עם שורת אפסים אחת

לפחות ובמקרה זה נקבל $\det\left(A'\right)=0\Rightarrow 0=\det\left(A\right)=a_{11}*a_{22}*\dots*a_{nn}$

נניח עתה ש $a_{ii}\neq 0$ לכל $1\le i\le n$. במקרה זה נוכל לרשום את A בצורה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & * & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}=E^2_{a_{11},1}*E^2_{a_{22},2}*\dots*E^2_{a_{nn},n}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$\det\left(A\right)=\det\left(E^2_{a_{11,1}}\right)\det\left(E^2_{a_{22},2}\right)*\dots*\det\left(E^2_{a_{nn},n}\right)*\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}=*$$

$$*=a_{11}*a_{22}*\dots*a_{nn}*\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & ... & ... & * \\ 0 & 1 & ... & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ניתן לדרך למטריצת יחידה I_n ע"י פעולות מהצורה

$R_i + \alpha R_j \to R_i$ $(i \neq j)$ בלבד. ולכן $\det\begin{pmatrix} 1 & ... & ... & * \\ 0 & 1 & ... & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_n) = 1$

ועל כן $\det(A) = a_{11} * a_{22} * ... * a_{nn}$

<u>הטענה הנ"ל עוזרת לנו לחשב דטרמיננטה.</u>

<u>אלגוריתם לחישוב דטרמיננטה:</u>

1. בהינתן מטריצה ריבועית $A \in M_{n\times n}(F)$ נדרג את A לצורה משולשית עליונה.
2. אם בצורה המשולשת העליונה A' אחד או יותר מאיברי האלכסון הוא אפס אזי $\det(A) = 0$
3. אם אף אחד מאיברי האלכסון מאיברי האלכסון של A' אינו מתאפס אזי $\det(A') = a'_{11} * a'_{22} * ... * a'_{nn}$ והדטרמיננטה של A מתקבלת מתוך

$$A' = E_k * E_{k-1} * ... * E_1 A \Rightarrow$$
$$\det(A') = \det(E_k) * \det(E_{k-1}) * ... * \det(E_1) * \det(A)$$
$$\det(A) = \frac{\det(A')}{\det(E_k) * \det(E_{k-1}) * ... * \det(E_1)}$$

<u>דוגמא:</u>

נחשב את הדטרמיננטה $\det(A)$ עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u>

נביא את A לצורה משולשת עליונה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}=E^3_{-1,3,1}E^3_{-1,2,1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

מכאן $\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}=1*1*\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{1}*\frac{1}{1}*(1*1*3)=3$$

<u>דרך ב:</u>

<u>הגדרה: מינור:</u>

בהינתן מטריצה ריבועית $A\in M_{n\times n}(F)$ המינור ה ij של A מסומן ב M_{ij} ומוגדר להיות המטריצה בגודל $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת ממחיקה של השורה ה i והעמודה ה j מA.

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow M_{12}=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix},M_{22}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

נשים לב לכך שלמטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$ יש n^2 מינורים.

<u>הגדרה: קו-פקטור:</u>

תהי מטריצה ריבועית $A\in M_{n\times n}(F)$ הקו-פאקטור של המקום ה ij של A מסומן ב A_{ij} (גם אם המטריצה תקרא B נסמן באות A) ומוגדר ע"י $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$

(נשים לב שהסימנים נעים כמו "לוח שחמט" – קוביות חיוביות ושליליות בהתאם למיקום

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$$)

- הדטרמיננטה של A מתקבלת ע"י

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad,\quad 1\le i\le n$$

or

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad,\quad 1\le j\le n$$

דוגמאות:

1. נחשב את $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a * A_{11} + b * A_{12} = a(+1)\det(M_{11}) + b(-1)\det(M_{12}) =$$

מתקיים

$$= a*d - b*c \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - cb$$

2. נחשב את $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1*(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2(+1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 1*(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)(-1) + 2*3 + (-1)*4 = 3$$

<u>מטריצה מצומדת:</u>

<u>הגדרה: מטריצה מצומדת (מוצמדת):</u>

בהנתן מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ המטריצה המצומדת לA מסומנת ב $adj(A)$ ומוגדרת ע"י $(adj(A))_{ij} = A_{ji}$ כאשר A_{ji} הם הקופקטורים של A

(בונים את המטריצה של הקו-פקטורים ומשחלפים אותה)

<u>דוגמא:</u>

נחשב את המטריצה המוצמדת של $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u>

נחשב את הקו-פקטורים:

$$A_{11} = (+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad A_{13} = (+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad A_{22} = (+1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad , \quad A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (+1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad A_{33} = (+1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

מכאן נקבל

$$adj(A)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&2&-2\\-2&-4&2\\-2&-2&4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&-4&-2\\-2&2&4\end{pmatrix}$$

משפט:

תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ אזי מתקיים
$$A*adj(A)=\det(A)*I$$
$$adj(A)*A=\det(A)*I$$

הוכחה:

מתקיים $\left[A*adj(A)\right]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(adj(A)\right)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\det(A), & i=j\\ 0 \quad , & i\neq j\end{cases}$

מכאן שאם $\det(A)\neq 0$, כלומר A הפיכה, אנו מקבלים ש :
$$A*\frac{1}{\det(A)}*adj(A)=I\Rightarrow$$
$$A^{-1}=\left[\frac{1}{\det(A)}*adj(A)\right]$$

דוגמא:

נחשב את A^{-1} עבור $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$

פתרון: ראשית: $\det(A)=1*1-2*3=-5\neq 0$

נחשב את $adj(A)$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&1\end{pmatrix}$$

לכן $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}*adj(A)=\frac{1}{(-5)}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&3\\-2&-1\end{pmatrix}$

נבדוק:

$$A^{-1}*A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כלל קרמר:

תהי $A\vec{x}=\vec{b}$ ממ"ל כאשר $A\in M_{n\times n}(F)$ ו-A מטריצה הפיכה.

במקרה זה קיים פתרון יחיד למערכת והוא מתקבל ע"י $A\vec{x}=\vec{b}\Rightarrow A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b}\Rightarrow\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

מכאן נקבל ש $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\frac{1}{\det(A)}\left(adj(A)\right)\vec{b}$

על פי רכיבים נקבל:

$$1\le i\le n \quad x_i=\frac{1}{\det(A)}\left[adj(A)\vec{b}\right]_i=\frac{1}{\det(A)}\sum_{j=1}^{n}\left(adj(A)\right)_{ij}b_j=\frac{1}{\det(A)}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{ji}$$

<u>משפט: כלל קרמר:</u>

נניח שנתונה ממ"ל $A\vec{x}=\vec{b}$ ממ"ל כאשר $A\in M_{n\times n}(F)$ ו-A מטריצה הפיכה.

נסמן את העמודות של A ב $\overrightarrow{C_1},\overrightarrow{C_2},...,\overrightarrow{C_n}$ אזי מתקיים ($1\le i\le n$)

$$x_i=\frac{\det\left(\overrightarrow{C_1}\ \Big|\ \overrightarrow{C_2}\ \Big|\ ...\ \Big|\ \overset{i\ place}{\vec{b}}\ \Big|\ ...\ \Big|\ \overrightarrow{C_n}\right)}{\det(A)}$$

<u>דוגמא:</u>

יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=4\\x_1+x_2+x_3=6\\x_1-x_2-x_3=-4\end{cases}$$

בשתי דרכים:

א. ע"י חישוב של A^{-1}
ב. ע"י כלל קרמר

<u>פתרון:</u>

א. נרשום את הממ"ל בצורה מטריציאלית: $\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\-4\end{pmatrix}$

נסמן $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

בדוגמא קודמת חישבנו את $adj(A)$ וקיבלנו $adj(A)=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&-4&-2\\-2&2&4\end{pmatrix}$

בנוסף מתקיים

$$\det(A)=3*(+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}+(-1)(-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+1(+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3*0+1*(-2)+1*(-2)=-4$$

מכאן

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)=\frac{1}{(-4)}\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -4 & -2\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 6\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$x_1=\frac{\det\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 6 & 1 & 1\\ -4 & -1 & -1\end{pmatrix}}{\det(A)}=\left(-\frac{1}{4}\right)\det\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 6 & 1 & 1\\ -4 & -1 & -1\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{4}\right)\left[4\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}6 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}6 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}\right]=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[4*0+1(-2)+1(-2)\right]=1$$

ב.

$$x_2=\frac{\det\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ 1 & -4 & -1\end{pmatrix}}{\det(A)}=\left(-\frac{1}{4}\right)\left[3\begin{vmatrix}6 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & -4\end{vmatrix}\right]=$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\right)\left[3*(-2)-4(-2)+1(-10)\right]=2$$

וכו' ל x_3

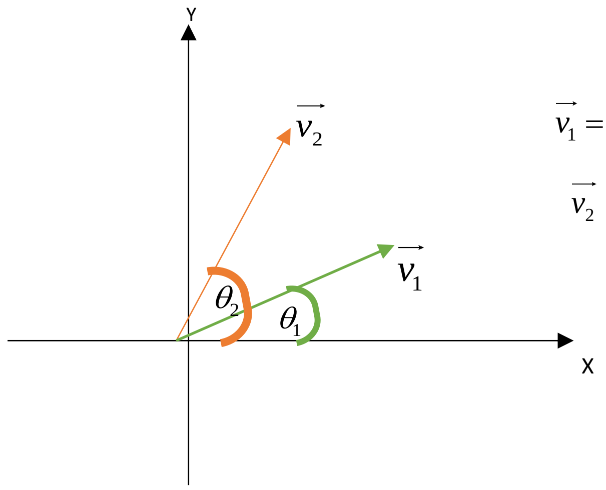
<u>משמעות גיאומטרית של דטרמיננטה:</u>

נסתכל על שני וקטורים במישור XY

$$\vec{v_1}=(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1),\quad \vec{v_2}=(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$$

עתה נבנה מטריצה A ששורותיה הן הוקטורים $\vec{v_1}$ ו $\vec{v_2}$

ונחשב את הדטרמיננטה של A

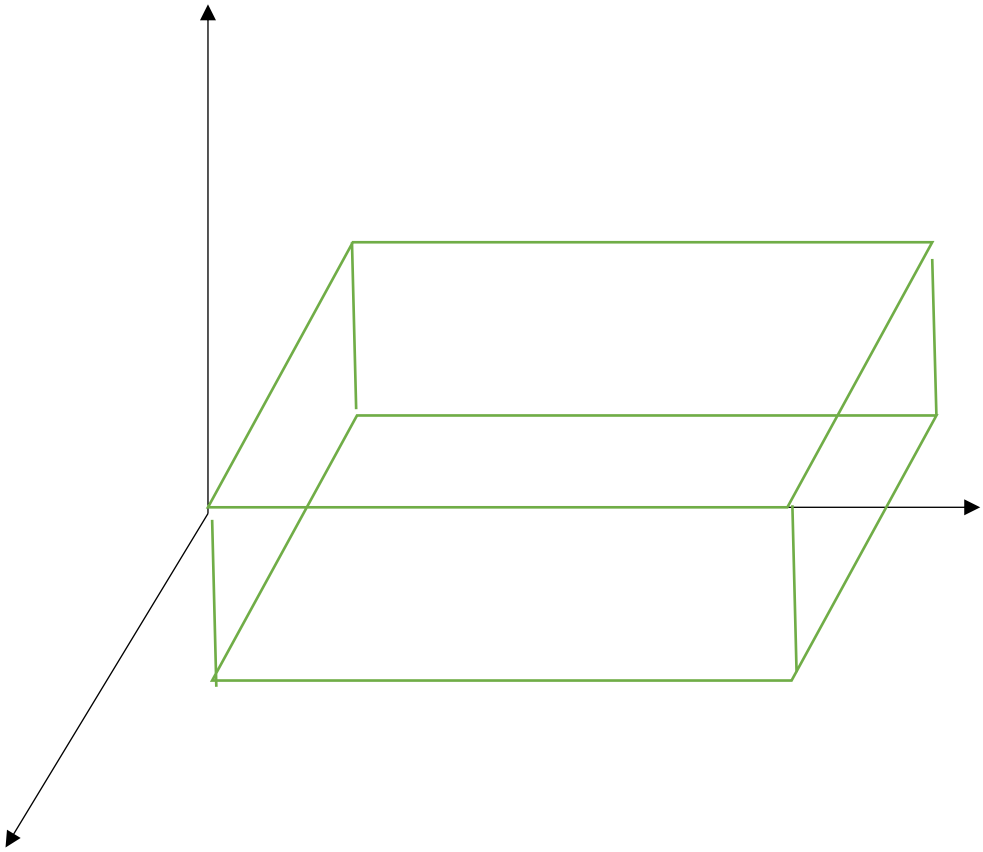


$$\det\begin{pmatrix} r_1\cos\theta_1 & r_1\sin\theta_1 \\ r_2\cos\theta_2 & r_2\sin\theta_2 \end{pmatrix} =$$
$$= r_1 r_2\left(\sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\sin\theta_1\right) = r_1 r_2 \sin\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

אנו מקבלים ששטח המקבילית הנוצרת ע"י הוקטורים $\overrightarrow{v_1}$ ו $\overrightarrow{v_2}$ היא

$$S = r_1 r_2 \sin\left(\theta_2 - \theta_1\right) = \det\begin{pmatrix} v_{1,x} & v_{1,y} \\ v_{2,x} & v_{2,y} \end{pmatrix}$$

- אם ניקח שלושה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{v_1} = \left(v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z}\right), \overrightarrow{v_2} = \left(v_{2,x}, v_{2,y}, v_{2,z}\right), \overrightarrow{v_3} = \left(v_{3,x}, v_{3,y}, v_{3,z}\right)$

$$\det\begin{pmatrix} v_{1,x} & v_{1,y} & v_{1,z} \\ v_{2,x} & v_{2,y} & v_{2,z} \\ v_{3,x} & v_{3,y} & v_{3,z} \end{pmatrix}$$

נקבל את נפח המקבילון הנוצר ע"י הוקטורים