פתרון מרצה

כל שאלה שווה 35 נק. נמקו את שלבי החישוב.
נסמן ב- N קבוצה של מספרים טבעיים, ב- T אמת וב- F שקר.

שאלה 1.

(19 נק') א מצאו שני פסוקים X במשתנים A,B,C כך ש- $(X\to C)\Leftrightarrow(A\vee B\to C))$.
כמה פסוקים כאלה קיימים שאינם שקולים לוגית זה לזה?

(16 נק') ב נגדיר $x*y=x\vee\neg y$ ו- $x+y=\neg(x\leftrightarrow y)$.
הוכיחו כי $\{+,*\}$ מערכת קשרים שלמה
(משקל שימוש באינדוקציה בהוכחה שווה 4 נקי).

פתרון.

א) נבנה טבלת אמת לפסוק X על-סמך השקילות הנתונה:

A	B	C	$A\vee B$	$A\vee B\to C$	$X\to C$	X
T	T	T	T	T	T	T/F
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T/F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T/F
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T/F
F	F	F	F	T	T	F

בטבלת האמת ניתן לזהות ארבע שורות שבהן אנחנו אדישים לגבי הערך של X,
ומכאן שסה"כ קיימים $2^4=16$ פסוקים כאלו שאינם שקולים לוגית זה לזה.
להלן דוגמא לשניים:

$$X_1=(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)$$

$$X_2=X_1\vee(A\wedge B\wedge C)$$

הערות:

- כאשר בונים את הפסוק בצורה דיזיונקטיבית נורמלית מטבלת האמת, חייבים לקחת בחשבון (לכל הפחות) את שלוש ההשמות שבהן הפסוק מקבל ערך T בוודאות ואסור להכניס לפסוק את ההשמה בה הוא מקבל ערך F בוודאות.
- ניתן לבנות פסוקים שאינם בצורה דיזיונקטיבית נורמלית, אך אז צריך לוודא שהם אכן שונים זה מזה (כלומר שאינם שקולים לוגית).
- אין צורך להחסיר 1 בספירה של הפסוקים שאינם שקולים לוגית זה לזה, שכן לא ביקשו פסוקים שכתובים בצורה דיזיונקטיבית נורמלית ובכל מקרה הטבלה שכולה F אינה רלוונטית כאן כי ישנם שלושה מקומות בהם הפסוק מקבל ערך T בוודאות.

ב) אנו יודעים כי המערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ היא מערכת קשרים שלמה. לכן, אם נצליח להראות כי לכל פסוק הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ קיים פסוק שקול לוגית הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד, זה יוכיח שהמערכת $\{+,*\}$ היא שלמה.

ראשית נראה כיצד ניתן לבטא כל אחד מהקשרים של המערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ בעזרת קשרים מהמערכת $\{+,*\}$ בלבד:

$$\neg x \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow T) \Leftrightarrow x + T \Leftrightarrow x + (x \vee \neg x) \Leftrightarrow x + (x * x)$$

$$x \vee y \Leftrightarrow x \vee \neg(\neg y) \Leftrightarrow x * (\neg y) \Leftrightarrow x * \big(y + (y * y)\big)$$

$$x \wedge y \Leftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow \neg(\neg x * y) \Leftrightarrow \neg\Big(\big(x + (x * x)\big) * y\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big(x + (x * x)\big) * y\Big) + \bigg(\Big(\big(x + (x * x)\big) * y\Big) * \Big(\big(x + (x * x)\big) * y\Big)\bigg)$$

כעת נוכיח זאת בעזרת אינדוקציה שלמה על מספר הקשרים בפסוק:

יהי φ פסוק הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ אשר לו n קשרים ($n \in \mathbb{N}$).

<u>בסיס האינדוקציה</u>: אם $n = 0$, הרי שאין קשרים בפסוק, ולכן ניתן לומר שהוא כתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח כי לכל פסוק הכתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$ ולו $k \in \mathbb{N}$ קשרים כך ש-$k < n$, קיים פסוק שקול לוגית הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד.

<u>צעד האינדוקציה</u>: נראה כי ניתן למצוא ל-φ פסוק שקול לוגית φ^* הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד. כיוון ש-φ כתוב במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$, הרי שישנם שלושה מקרים:

1. $\varphi = \neg\alpha$, כאשר α פסוק במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$.
   אזי מספר הקשרים ב-α קטן מ-n, ולכן α מקיים את הנחת האינדוקציה.
   כלומר קיים פסוק α^* הכתוב במערכת $\{+,*\}$ אשר שקול לוגית ל-α.
   במקרה זה נקבל שהפסוק $\varphi^* = \alpha^* + (\alpha^* * \alpha^*)$ הוא פסוק שקול לוגית ל-φ הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד.
2. $\varphi = \alpha \vee \beta$, כאשר α, β פסוקים במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$.
   אזי מספר הקשרים ב-α ומספר הקשרים ב-β קטנים מ-n, ולכן α, β מקיימים את הנחת האינדוקציה. כלומר קיימים פסוקים α^* ו-β^* הכתובים במערכת $\{+,*\}$ אשר שקולים לוגית ל-α ול-β, בהתאמה.
   במקרה זה נקבל שהפסוק $\varphi^* = \alpha^* * \big(\beta^* + (\beta^* * \beta^*)\big)$ הוא פסוק שקול לוגית ל-φ הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד.
3. $\varphi = \alpha \wedge \beta$, כאשר α, β פסוקים במערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$.
   אזי מספר הקשרים ב-α ומספר הקשרים ב-β קטנים מ-n, ולכן α, β מקיימים את הנחת האינדוקציה. כלומר קיימים פסוקים α^* ו-β^* הכתובים במערכת $\{+,*\}$ אשר שקולים לוגית ל-α ול-β, בהתאמה.
   במקרה זה נקבל שהפסוק:

$$\varphi^* = \left(\left(\alpha^* + (\alpha^* * \alpha^*)\right) * \beta^*\right) + \left(\left(\left(\alpha^* + (\alpha^* * \alpha^*)\right) * \beta^*\right) * \left(\left(\alpha^* + (\alpha^* * \alpha^*)\right) * \beta^*\right)\right)$$

הוא פסוק שקול לוגית ל-φ הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד.

כלומר הראנו שבכל מקרה ניתן למצוא ל-φ פסוק שקול לוגית הכתוב במערכת $\{+,*\}$ בלבד, ולכן המערכת $\{+,*\}$ היא מערכת קשרים שלמה. ■

<u>הערות:</u>

- עיקר ההוכחה הוא לבטא את שלושת הקשרים של המערכת $\{\neg,\vee,\wedge\}$.
  להראות בטבלת אמת שאין "השמה בעייתית" זה לא מספיק טוב וזאת גם לא טענה שמתאים להוכיח באינדוקציה.
- שימו לב ש: $\neg(\alpha \leftrightarrow \alpha) \not\Leftrightarrow \neg\alpha$!! הפסוק $\alpha \leftrightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה (ודאו שאתם מבינים למה ובמידת הצורך בדקו זאת בעזרת טבלת אמת), ולכן הפסוק $\neg(\alpha \leftrightarrow \alpha)$ הוא פסוק שקר.
- להלן אופציה נוספת (פשוטה יותר) לביטוי הקשר $\vee$, ללא שימוש בקשר $\neg$ שהוגדר קודם:

x	y	$x \vee y$	$x * y = x \vee \neg y$	$x * (x * y) = x \vee \neg(x \vee \neg y)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

בעזרתה ניתן כמובן לפשט גם את ההגדרה של הקשר $\wedge$.

<u>שאלה 2:</u>

א) נתבונן במשוואה $X \setminus A = B$, כאשר $A, B \in P(N)$ פרמטרים הנתונים ו- $X \in P(N)$ משתנה.

(12 נק') א1) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה לא קיים פתרון. נמקו למה בתנאי שמצאתם לא קיים פתרון ולמה פתרון קיים בכל מקרה אחר.

(11 נק') א2) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה קיים פתרון יחיד.

(12 נק') ב) עבור איזה תנאי $Q(A,B)$, מוגדר על-ידי נוסחה שלא מכילה סמני פעולות Δ ו- $\setminus$, על קבוצות A, B מתקיים $A\Delta B = B \setminus A$ יש להוכיח כי בתנאי $Q(A,B)$ מתקיים $A\Delta B = B \setminus A$ ואם $Q(A,B)$ לא מתקיים אז $A\Delta B \neq B \setminus A$.

פתרון.

א1) $X \setminus A = B \Leftrightarrow X \cap \bar{A} = B \Rightarrow B \subseteq \bar{A}$. לכן $B \subseteq \bar{A}$ הינו תנאי הכרחי לקיום הפתרון. נוכיח שהוא גם תנאי מספיק. אם $B \subseteq \bar{A}$ אז $X = B$ יהיה פתרון המשוואה, כי מההכלה $B \subseteq \bar{A}$ נובע ש $B \cap \bar{A} = B$.

קיבלנו ש למשוואה $X \setminus A = B$ יש פתרון אם ורק אם $B \subseteq \bar{A}$. לכן למשוואה אין פתרון אם ורק אם $B \not\subseteq \bar{A}$.

<u>הערה:</u> התנאי $B \subseteq \bar{A}$ שקול ל- $B \cap A = \varnothing$. לכן התשובה שקיבלנו ניתן להציג בצורה שקולה : משוואה אין פתרון אם ורק אם $B \cap A \neq \varnothing$

א2) לפי הסעיף הקודם למשווה יש פתרון אם ורק אם $B \subseteq \bar{A}$. נניח שהתנאי מתקיים. אז $X = B$ ו $X = A \cup B$ הם פתרונות המשוואה, כי $B \cap \bar{A} = B$ ו $(A \cup B) \cap \bar{A} = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = B$.

אם למשוואה יש פתרון יחיד, אז $B = A \cup B \Rightarrow A \subseteq B$. יחד עם $B \subseteq \bar{A}$ אנו מקבלים $A \subseteq B \subseteq \bar{A} \Rightarrow A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A = \varnothing$. ז"א $A = \varnothing$ הינו תנאי הכרחי ליחידות הפתרון. נוכיח שהוא גם תנאי מספיק: $A = \varnothing \Rightarrow X \setminus \varnothing = B \Rightarrow X = B$ פתרון יחיד.

הוכחנו שלמשוואה יש פתרון יחיד אם ורק אם $A = \varnothing$.

ב) מהשוויון $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ נובע שההכלה $B \setminus A \subseteq A\Delta B$ מתקיימת לכל שתי קבוצות A, B . לכן השוויון $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = B \setminus A$ יתקיים אם ורק אם $A \setminus B \subseteq B \setminus A$. מכאן נובע ש:

$$A\Delta B = B \setminus A \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq B \setminus A \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = A \setminus B \Leftrightarrow$$

$$(A \cap \bar{B}) \cap (B \cap \bar{A}) = A \cap \bar{B} \Leftrightarrow \varnothing = A \cap \bar{B} \Leftrightarrow A \subseteq B$$

לכן השוויות מתקיים אם ורק אם $A \subseteq B$.

<u>שאלה 3:</u>

(17 נק') א) תהא U קבוצה כלשהי ו $A\subseteq P(U)$, ז"א כל איבר של A הוא תת-קבוצה של U.
אומרים כי Y עוקב מידי של X אם X מוכל ב-Y ולא שווה Y וכל Z שמכיל את X ולא שווה X מכיל גם את Y.
רשמו פסוק המבטא שלכל X קיים עוקב מידי אחד ויחיד. אפשר להשתמש רק בקשרים כמתים, משתנים וסימנים $\subseteq$ ו- $=$.

(18 נק') ב) הוכיחו כי אם $A\setminus C=B\setminus C$ וגם $C\setminus A=C\setminus B$ אז $A\subseteq B$ לכל קבוצות A,B,C.

פתרון.

א) כל איברים בסעיף הזה שייכים לקבוצה A.

$$(\forall X)(\exists Y)((\neg(X=Y)\wedge(X\subseteq Y)\wedge(\forall Z)(X\subseteq Z\wedge\neg(X=Z)\rightarrow Y\subseteq Z))\wedge$$
$$\wedge(\forall V)(\forall W)((X\subseteq V\wedge\neg(X=V)\wedge(X\subseteq W\wedge\neg(X=W)\rightarrow V\subseteq W))\rightarrow V=Y))$$

<u>הערה.</u> שורה ראשונה של הנוסחה מבטא תנאי קיום ושורה שניה מבטא תנאי יחידות של עוקב מידי.

ב) כדי להוכיח ש-$A\subseteq B$ לוקחים $x\in A$ כלשהו ומוכיחים ש-$x\in B$.
יש 2 מקרים
1) $x\in A\wedge x\notin C$ ז"א $x\in A\setminus C$ ואז $x\in B\setminus C$ לפי הנתון $A\setminus C=B\setminus C$ לכן $x\in B$.
2) $x\in A\wedge x\in C$ לכן $x\notin C\setminus A$ ואז $x\notin C\setminus B$ לפי הנתון $A\setminus C=B\setminus C$ לכן $x\in B\vee x\notin C$
לכן $x\in B$ בהכרח כי $x\in C$.
קיבלנו כי אם $x\in A$ אז בהכרח $x\in B$ ולכן $A\subseteq B$.

<u>הערה 1.</u> מדוגמאות הבאות נובע כי תנאי אחד $A\setminus C=B\setminus C$ או $C\setminus A=C\setminus B$ לא מספיק להוכחה ש-$A\subseteq B$.
דוגמה 1. $C=\{1,2\},A=\{1\},B=\{2\}$ מקבלים כי $A\setminus C=B\setminus C=\varnothing$ ו- $A\not\subset B$
דוגמה 2. $C=\varnothing,A=\{1\},B=\{2\}$ מקבלים כי $C\setminus A=C\setminus B=\varnothing$ ו- $A\not\subset B$
<u>הערה 2.</u> אפשר להניח ש- $x\in A\setminus C$ אבל זה הנחה נוספת וצריך לבדוק גם מיקרה $x\notin A\setminus C$.