



האגודה הסטודנטית
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

באדיבות מדור אקדמיה, אגודת הסטודנטים, אוניברסיטת בן גוריון.
www.bgu4u.co.il

הרצאה 1

אודד בן-ביוך

שעות קבלה: ימי ראשון, 18"-16" (205 | 37)

מייל: ohadben@post.bgu.ac.il

אתר הקורס: /~algo201

- כל תלמיד מנהלתי, רק דרך מערכת השניות של האתר
 עקומות בית: 6 עקומות (5 וזיונים הטורים).

מנהל הזיון: - קוחן: 20%
 - מחנן: 55% (חוקית מעורר)
 - עקומות: 15%

מטרת הקורס: שיטות חישוב אלגוריתמיות

- # נראה מזון טכניקות לעתיד קצות
- # נראה מזון קצות ואלגוריתמים ששיתפים אותם
- # נקט כיצד לעתיד קצות בזורה עילוי ונכונה:
- נגיד את הקצות בזורה מיושקת
- נאור אלגוריתם ששיתף אותה בזורה נכונה
- נוכח נכונות (פורמלית)
- נראה כי האלגוריתם יעיל (צמן רצה פועליו וטטה, נאור: פאלימי, זינארי, לאחתי, קובל)

דגשים בקורס:

- קדימת קצות: נסו לעתיד top-down
- נמצא זה שתרין נאוי על מנת לוודא שהקצות ניתנת לעתיד
- וכי אנו ממינים אותה
- נתכנן אלגוריתם בזורה של top-down
- * תיאור מופשט של האלגוריתם - טקסט השלבים העיקריים
- * מילי לרצה אשטוס (מחנן נתונים וכו').
- * הוכחת נכונות (מופשטת).
- * מימוש וניתוח צמן הריצה.
- הוכחת נכונות פורמלית בזורה של top-down
- * נסח מופשט ליקר שמוכיח את נכונות האלגוריתם (נמצא כי האלגוריתם מחזיר את מה שחוג צריך להחזיר).
- * נסח טענות עצר שמתקוות את מולך הוכחה (כמעט הוכחה)
- * הוכחת המופשט על סך הטענות.
- * הוכחת הטענות.

דוגמאות:

יציאת מסלול המינימום קצר מכוון
 קצר מכוון \leq



יש מסלול שצריך קצר הקצות קצר
 (שם אחת קצות). $p = \langle a, b, c \rangle$

מושגי בסיס:

- ← קצות - תיאור הקשר בין קלט אפלט
- ← מופשט - קלט תקין של הקצות
- ← יש למצוא - (שם חוקי אפלט, אם קיים (ניתכנו) כחזה שברונות)

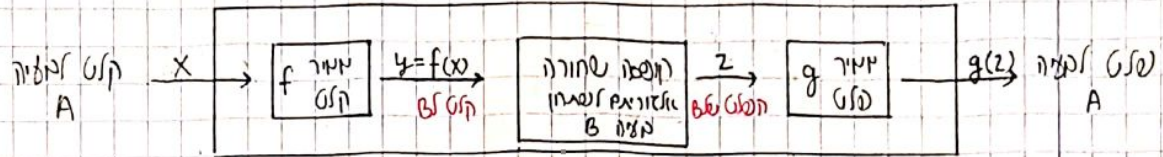
1. איזורים (אויס) - ניצור את כל הפרוטונים על V .
2. לכל פרוטון (קצוק) אם הוא מסוף.

ניתוח ציון רינה: $|V|!$ פרוטונים
 ישן $|V|!$ פרוטונים
 $2^{(|V| \log |V|)} = |V|! > 2^{|V|}$

ציון הרינה קצוק מציון אקסטרנציונל, ולכן האלגוריתם לא יעיל.

פיתרון קצוק לרינה:

קחינת קצוק A , נשתר אותה לאלגוריתם השותר את קצוק B .



אלגוריתם השותר קצוק A מתבסס על קצוק B .

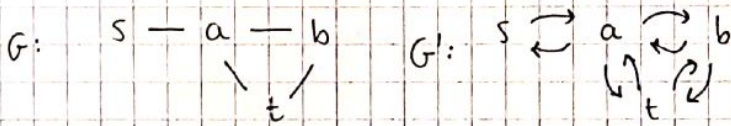
1. קחינת קצוק x לקצוק A השלף עליו את מיון קצוק f וקבל פלט $y=f(x)$, קצוק B .
2. השלף אלגוריתם השותר קצוק B על קצוק y וקבל פלט z .
3. השלף את מיון קצוק g על z וקבל פלט לקצוק A .

* הרקורסיה כוללת רק את שני המרחבים f, g .

צדקה פשוטה:

- קצוק A : מציאת מסוף קצר יותר מ t בחזק לא מכון.
 - קצוק B : מציאת מסוף קצר יותר מ t בחזק מכון.
- (אלגוריתם BFS על חזק מכון מ $(|V|+1, 0)$)

הרציון: נשפף כל קצוק 2 קטנה מכונות.
 מיון קצוק: קחינת קצוק A , חזק לא מכון $G(V, E)$.
 (קחו ממנו חזק מכון $G'=(V, E')$ כאשר
 $E' = \{ \langle v, u \rangle, \langle u, v \rangle \mid \langle v, u \rangle \in E \}$)



נשלף אלגוריתם המסוף הקצר ביותר מ t קצוק G .

מיון (השלף): קחינת מסוף (אוס קיים) קצוק G , נחציו (השלף) לא מכון קצוק. (מציאת מיון השלף זהו עושה רינה).

אלגוריתם למחירון קטנה A (מכוס רזוקציה לב)

1. הוויית: גל לא מכון G וקולקטורים, אצ הרל את מיור הקלט וקבל את מכון G.
2. מוצא מסול קצר ביותר מל כלל (קטצרת BFS)
3. הרל את מיור הקלט על המסול שחתקל וחחצר את הקלט.

מגנט: האלגוריתם מכוס רזוקציה מוצא מסול קצר ביותר מל כלל
 קט, אצ קיים כצו.

טצרת לצר: ק מסול קאוקר א מל כלל קט אצ ק מסול
 קאוקר א מל כלל קט.

ניתוח צמן ריצה:

מיור הקלט - מצור על הקטצרת ושכפול $O(|E|)$
 צמן חרצת אלגוריתם ב - $O(|V| + |E|) = O(|V| + |E|)$
 מיור הקלט - $O(1)$

קציית תתי המחרוצות

קלט: אוסל של א מחרוצת קאוקר 3 שמנות צו מצו
 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$

צוצמח: $W = \{the, hea, eat, ate, tea, eam\}$

הלצרה: מחרוצת חוקית T לצור W היתה מחרוצת קאוקר 2+א
 אצער אוסל תתי המחרוצות שלו קאוקר 3 (ווא קציוק W.

צוצמח: theateam

יש למצוא: האצ קייצת מחרוצת חוקית T לצור W

1. נקנה את כל השומטציות של W
2. זכל שומטציה נקצוק האצ ניקן (חרכים ממנה מילה חוקית.

צוצמח: לצור השומטציות $\langle tea, ea, eat, \dots \rangle$
 לא ניקן להמשיך על eat.

ניתוח צמן ריצה: צמן חריצה קוא לשחות $n! < 2^n$ -
 אלגוריתם לא קיל!

נקצל רזוקציה למציית קיים מסול (מילטון) קצל מכון

אוקחנה: מילה W יכולה להופעל לפני W אצ הסייכא קאוקר 2 של
 W היתה חרייכא קאוקר 2 של W.

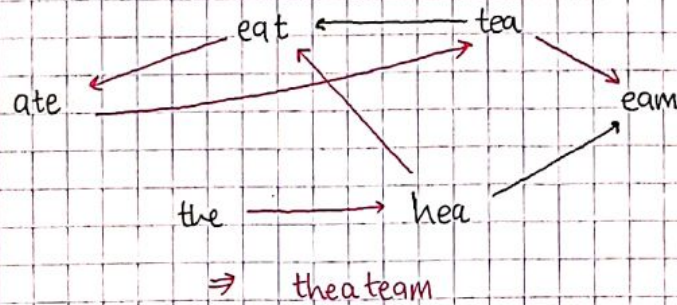
זרסת
 הומציה
 קיים/לא
 קיים

מיון הקט: כותבת קט $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ נקנה את
 מכון $G = (V, E)$ כצורה הקט:
 $V = W$
 $E = \{(w_i, w_j) \mid \text{"סייג" קאוור 2 של } w_i \text{ ו- } w_j \text{ "ר"ש קאוור 2 של } w_j\}$

* (נפילת חופסה שחורה קיים מסלול המיון קט).

מיון הפלט: אם נמצא כי קיים מסלול המיון קט, נחזיר כי
 קיימת מחוצת חוקית T עבור W
 אחרת, נחזיר כי לא קיימת מחוצת חוקית T
 עבור W.

דוגמה: $W = \{ate, eat, tea, eam, the, hea\}$



הוכחת נכונות:

משפט: האלגוריתם מחזיר "כן" אם קיימת מחוצת חוקית T עבור W.
 חסר!

טענת לצד 1: אם קיימת מחוצת חוקית T עבור W אז קדצ G שמונה מיון הקט קיים מסלול המיון.

טענת לצד 2: אם קדצ G שמונה מיון הקט קיים מסלול המיון, אז קיימת מחוצת חוקית T עבור W.

המשך דוגמה - הדצאה 2

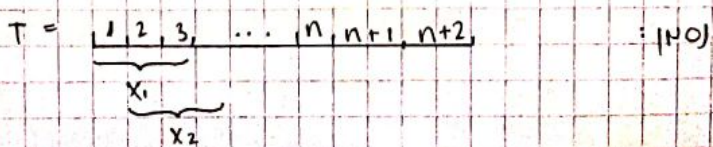
היה אפשר
 לעשות
 אחרת,
 בעזרת נכונות
 של טענות
 אחרות יצאנו.

הוכחת (משפט):

⇒ נניח כי קיימת מחוצת חוקית T עבור W. אפי טענת לצד 1,
 נבדל G שמונה מיון הקט קיים מסלול המיון.
 (באופן, הוקפסה (השווה מחצית ק), ושי מיון הפלט,
 (האלגוריתם מחזיר "כן").
 ⇐ נניח כי האלגוריתם מחזיר "כן". אפי מיון הפלט, קיים מסלול
 המיון קט אפי טענת לצד 2, קיימת מחוצת חוקית T
 עבור W.

הוכחת טענת לצד 1:

תהי T מחוצת חוקית עבור W. נקנה ממנה מסלול המיון P
 כדצ G.
 שוקים:
 1. נציר את P
 2. נוכיח כי P
 3. נוכיח כי P מסלול המיון.



נסמן x_i את הערכה המתחילה באות ה- i של T .
 נסמן: $P = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

P מסלול: x_i קוזקוז ויש קשת (x_i, x_{i+1}) קשר G .
 מכיוון ש T חוקית עבור W , אוסף תתי המחרוזות
 באורך 3 של T $\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ הינו קציוק W .
 מתיאור מידר הקט, כל x_i הינו קוזקוז.
 x_i - שלשה המתחילה באות ה- i של T .
 x_{i+1} - שלשה המתחילה באות ה- $i+1$ של T .
 \leftarrow הסיסא באורך 2 של x_i הוא הריסא באורך
 2 של x_{i+1} ולפי (הזרת מידר הקט), (x_i, x_{i+1})
 קשת G .

P מסלול המילטון: מחרוזת W שונות זו מזו ולכן קט יש
 קציוק W קוזקוזים.
 ראוע כי $W = \{x_i\}_{i=1}^n$, ולכן n קוזקוזי המסלול שונים
 זה מזה. לכן, כל קוזקוז קט מושיע ק P על אחר
 קציוק. ■

הוכחת טלמט לזכר 2:

יהי $P = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ מסלול המילטון קשר G .
 נונה מחרוזת חוקית T עבור W :
 נסמן: $W = \{x_1, \dots, x_n\}$ ונסמן C_i את האות העלשית של x_i .
 נסמן: $T = x_1, x_2, \dots, x_n$
 טלמט: T מחרוזת חוקית עבור W .
 נשים \heartsuit כי $|T| = n+2$.
 נתר להוכיח כי אוסף כל תתי המחרוזות באורך 3 של T הוא W .
 P מסלול, ולפי תיאור מידר הקט, נקטל כי הסיסא באורך 2
 של x_i הוא הריסא באורך 2 של x_{i+1} .
 נקטל כי: $x_1 = C_1, x_2 = C_2, \dots, x_n = C_n$
 ניתן להמשיך באינדוקציה ולקטל: $C_i = x_{i-2} x_{i-1} C_i$
 קיטלעו כי x_i וינה תת מחרוזת מאורך 3 המתחילה באות ה- i
 של T , ולכן אוסף כל תתי המחרוזות מאורך 3 של T
 הוא $W = \{x_i\}_{i=1}^n$.
 ↑

■ P מסלול המילטון, לכן אוסף כל הקוזקוזים שלו זו קציוק W .

ניתוח זמן רינה:

-	מידר הקט:	קניית הקט - אל זכר ציתים נקלוק תאם קיימת קשת $O(n^2)$ במצא
-	קושטו שמורה:	מסלול - לא יקטל אאזורהגס ילא אכסיה זו.
-	מידר הקט:	$O(n)$

הורצאה 2

רדוקציה מקבילת תתי היתחצות אינלית מסול אוילר כהרף מכון

תצורות: קליית מצאת מסול אוילר כהרף מכון.

מושל: כרף מכון $G(V, E)$

יש אימצוא: מסול שלחור ככל קשת קציוק שלץ אחת.

משפט: כהרף מכון וחשיר G קיים מסול אוילר אם"מ קיימים s, t כך ש:

- לכל $v \neq s, t$: קצת כניסה = קצת יציאה.
- קצת היציאה של s שזולה קו מצרעת הקניסה.
- קצת הקניסה של t שזולה קו מצרעת היציאה.

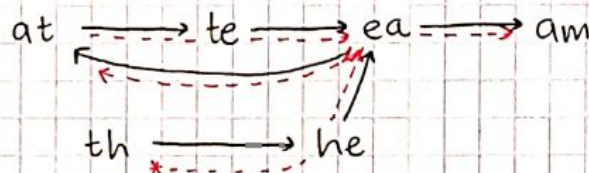
זמן בקיקת התנאים: $O(|V| + |E|) = O(|E|)$
קיים אלגוריתם הוז קצמן $O(|E|)$ ומצוא מסול אוילר כהרף.

נרצו להוראות רדוקציה אינלית מסול אוילר.

כל שלשה קל תתורצז אקשת
 w תיכנס אקוקוקז ממון יוצאת z אמ"מ w יכולה אקושע
אשני z כורצז.

ממיר (תקלט): הוועיקן w , נקונה כרף G קו הקוקוקזים יהיו
הנ"שאות והסישית מאורן 2 על הוילוס קל, וליא
חצרות.
יש קשת מכונת w מוריישו שזה לסישית שזה

דוגמה: $W = \{the, hea, eat, ate, tea, eam\}$



$T = theateam$

ממיר תפלט: נחיר "כן" אמ"מ קיים מסול אוילר קט.

הוכחת נכונות:

משפט: (ואלגוריתם מחציר "כן" אמ"מ קיימת מחוצת חוקית T לקור w).

טענה 1: אם קיימת מחוצת חוקית T לקור w אז קט קיים מסול אוילר.

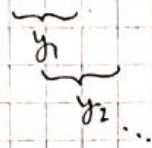
טענה 2: אם קיים מסול אוילר קט אז קיימת מחוצת חוקית T לקור w .

מסמך
מסמך
מסמך

הוכחת ממשט: כמו הוכחת הממשט הקודם, רק צריך לעבוד שניות.

הוכחת טענה 1:

תהי T מחוצת חוקית עבור w .
נניח M מונה מסלול אוילר קט.
נניח P קוץ את 2 האותיות המתחילות
במקום זה של T .
 $T = 1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2, \dots$



טענה: הוויז, $P = \langle y_1, y_2, \dots \rangle$ מסלול אוילר קט.

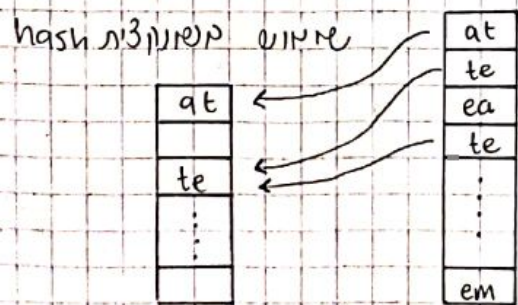
P מסלול: T חוקית עבור w , ולכן אף $i = 1, \dots, n$ קיימת מחוצת y_i המתחילה באות i של T .
היכן הוויזא באורך 2 של y_i .
והיכן הוויזא באורך 2 של y_i .
אם הוויזא באורך 2 של y_i ומוז קורקוז.
קט וקיימת קשת (y_i, y_{i+1}) .

P מסלול אוילר: P יש $n+1$ קורקוזים וח קשתות.
כל: אלו קצוות כל n הקשתות קט.
אם טענו קודם: אף y_i (הראשון קשת
במסלול P לפי הנחה, כל קשתות w שונות
בו מס ולכן P יש קצוות n קשתות שונות.
מזיר הקט קנה אף מחוצת באה קשת קט.
המתחלות שונות, לכן קט יש קצוות n קשתות
שונות. לכן כל קשת קט מופיעה P .
קצוות פשוט אחת. ■

הוכחת טענה 2: יחי $P = \langle y_1, \dots, y_{n+1} \rangle$ מסלול אוילר קט.
(נניח P מחוצת חוקית $T \dots$ נקמה)

ניתוח צמן ריצה:

- מזיר הקט: קניית הוויזא
מיון נאיבי (קניית הוויזא) $O(n^2)$
מיון יעיל - נשגש קשתות $O(n) = hash$
 - קושטה שחורה: $O(n)$
 - מזיר השלט: $O(n)$
- לפי מזיר הקט:



כינוי קורקוזים שונים חוזרים על עצמם.

אלגוריתם חזון - עוזר קשקים. קב שם, מקבל בחירה "טוקס קיור" (האשמה באות הרע). (האשמה לא מתחטף על בחירות!).

קליט השעליות:

מושל: אוסף של n (שעליות) קטעים $1, \dots, n$. כל שעליות i (היא) נוסף (s_i, f_i) .
 s_i, f_i הם זמן התחלה (הסיום) של הקטע i .
 (שברון חוקי: $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ שם שעליות
 צוות $(\forall i \neq j \in I) (s_i, f_i) \cap (s_j, f_j) = \emptyset$)
 יש למצוא: (שברון חוקי) P מספר רק ביותר של שעליות.

סכימה אלגוריתם חזון:

- אתחול: $G \leftarrow \emptyset$ (השברון החלקי) שנקנה על n .
 $S \leftarrow \{1, \dots, n\}$ קבוצת השעליות בקט G שצוות אפשרות קט.

- עבר: כל עוד $S \neq \emptyset$ קבל:
1. קח $i \in S$ ופס כל בחירה מסוים
 2. $G \leftarrow G \cup \{i\}$
 3. הוצא מ S את i וכל קטע שנחתך איתו

- סיום: חזר את G .

אלגוריתם (אופי):

כל תת קבוצה $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ (קבוצת האם היא חוקית, ונחזיר I חוקית מקסימלית).
 זמן הריצה: לא יעלה, יש 2^n תתי קבוצות.

כלי בחירה אושטריים:

- שעליות שמתחילה ואשונה
- הקטע הני קטן
- שעליות שמתחילה P הני מ G
- שעליות שמסתיימת ואשונה.

אלגוריתם חזון:

- אתחול: $G \leftarrow \emptyset$ (השברון החלקי) שנקנה על n .
 $S \leftarrow \{1, \dots, n\}$ קבוצת השעליות בקט G שצוות אפשרות קט.

- עבר: כל עוד $S \neq \emptyset$ קבל:

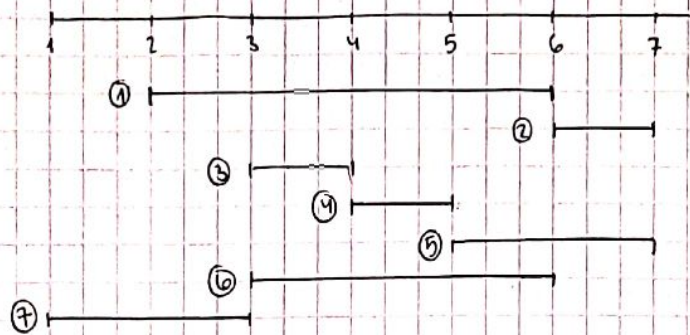
1. קח $i \in S$ P זמן סיום נמוך ביותר.
2. $G \leftarrow G \cup \{i\}$
3. הוצא מ S את i וכל קטע שנחתך איתו.

- סיום: חזר את G .

הרצאה 3

אלגוריתמים חסדניים - הסתק

צומח:



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$G = \emptyset$$

$$i = 7 : \quad S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$G = \{7\}$$

$$i = 3 : \quad S = \{2, 4, 5\}$$

$$G = \{7, 3\}$$

$$i = 4 : \quad S = \{2, 5\}$$

$$G = \{7, 3, 4\}$$

$$i = 2 : \quad S = \emptyset$$

$$G = \{7, 3, 4, 2\}$$

הוכחת נכונות:

משפט: החרוק מחזיר קבוצה חזקה של פלטיות קבוצת מקסימי.

הוכחת נכונות שזיה:

כל שלב האלגוריתם מקבל בחירה אופטימלית ולכן קונה פתרון אופטימלי.
- טענה זו נכונה אם כל בחירה ולכן לא מתקבלת.

הוכחת נכונות נכונה:

נראה שכל זוג של האלגוריתם עושה, האלגוריתם החזקן לא טועה, לומר, ניתן להעביר את G אלגוריתם אופטימלי.

טענת עזר: כל שלב האלגוריתם, קיים פתרון אופטימלי ה. המכיל את G .

הוכחת משפט:

נניי טענת העזר, בסיום האלגוריתם קיים פתרון אופטימלי G ש $G \subseteq S$. נראה ש $G = S$.
בסיום האלגוריתם, $S = \emptyset$ לכן לא קיים קטע קטל שער אקטליז קט.
כנגד, לא קיים קטע קט שער אפלייג קט ולכן $G = S$.
(אם קיים $G \subseteq S$, אזי מחוקיק S , i לא מתנגד)
 R אז פליג קט. סתירה!

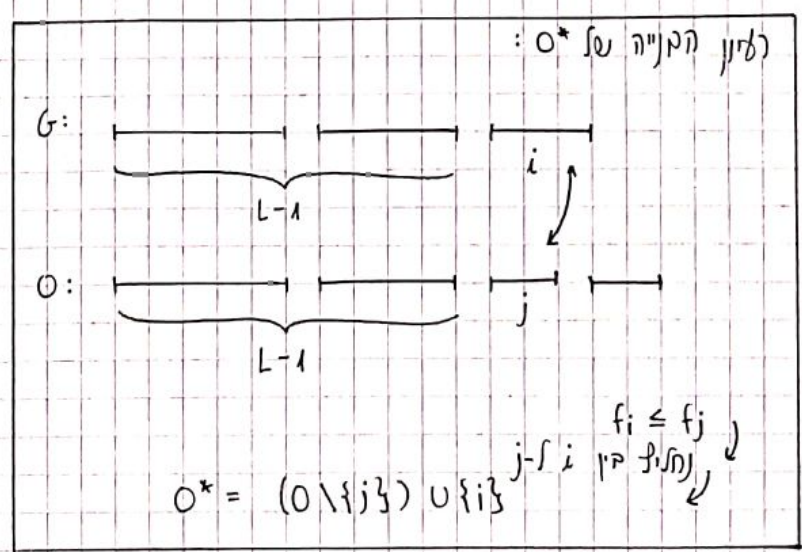
* פתרון
אופטימלי -
פתרון חזקי
מקסימלי קבוצה.

הוכחת טענת 6.2: הוכחה באינדוקציה על שכי (האינדוקציה):
 במקרה שכי, מספר שכי האינדוקציה = |G|.
 נשים ♥ כי זה לא תמיד קר.

* בסיס: $\phi = s_0$
 כל שכי אונטית 0 מקיים $\phi = s_0 \leq 0$.

* הוכחת האינדוקציה: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $L-1$ שכי.

* צעד האינדוקציה: מה"א, קיימים השכי $(L-1)$ קיים שכי אונטית 0 כך ש $s_{L-1} \leq 0$.
 תהי i השכי הנבחרת, והחזקן בתחילת השכי L .
 אז $s_L = s_{L-1} \cup \{i\}$.
 קיים שכי אונטית 0^* (המכיל את s_L).
 אז $i \in 0^*$ ואם $i \in 0$ אז $s_L \leq 0$ ונניח $0^* = 0$.
 אחרת, $i \notin 0$.



← (מספר מקרה ק': תהי $s_L \setminus \{j\}$ על שכי סיום מקדים ביותר.
 - מניח יש טעות?
 מכיון ש s_L חוקי ו-0 חוקי ומקסימלי אז $|s_L| \leq |0|$.
 קצת ש $s_L \setminus \{j\} \neq \emptyset$ אז $i \notin 0$ מהקיים.

טענה: $0^* = (0 \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ שכי חוקי ומקסימלי המכיל את s_L .

* מכיון ש $s_L \setminus \{j\} \subseteq 0^*$ ו- $s_L \leq 0$ מתקיים:
 $s_L = s_{L-1} \cup \{i\} \subseteq 0^*$
 * מכיון ש $j \in 0$ ו- $i \notin 0$, $|0^*| = |0|$.
 * נותר להוכיח כי 0^* חוקית.
 מכיון ש 0 חוקית, s_L שיש להוכיח הוא כי i צר אל הקטעים $(s_L \setminus \{j\})$.
 מחוקיות s_L נובע כי i צר לקטעים $(s_{L-1} \setminus \{j\})$.
 נותר להוכיח כי i צר לקטעים בקבוצה $(s_{L-1} \setminus \{j\}) \cup \{i\}$.
 מחוקיות s_L נובע כי i צר לקטעים $(s_{L-1} \setminus \{j\})$ או $f_i \leq f_j$.
 נראה כי $f_i \leq f_j$ נובע מכך כי i צר לקטעים $(s_{L-1} \setminus \{j\})$ או $f_i \leq f_j$.
 מחוקיות s_L , j צר לקטעים $(s_{L-1} \setminus \{j\})$ או $f_j \leq f_i$.
 מתקיים כי בסוף השכי $(L-1)$, $j \in S$.
 (החזקן קחו את i בעל L . אין, ואם כן נסתירה, מהקיים $f_i \leq f_j$.)
 חוקי ואונטית אמר את s_L .

מימוש וניתוח זמן ריצה:

- מימוש (נאיבי) - קבל שלם שנוסב הטל i , סדרה S וצורקים את כל מי שמת נדש P_i .
- זמן ריצה: $O(n^2)$
- מימוש יעיל יותר - נמין את הקטעים לפי זמן סיום נמוך ביותר.
- אתחול: (מין את הקטעים לפי הסדר: $S \leftarrow I_1, I_2, \dots, I_n$ #
- $G \leftarrow \emptyset$ #
- $F_G \leftarrow 0$ #
- הסוף של השלימות שמסתיימות מאוחר ביותר קט. $i = 1, \dots, n$ קצף:
- תהי I_i השלימה (המאה) קטין: $G \leftarrow G \cup \{I_i\}$ אם $F_G \leq S_{I_i}$ אז: $F_G \leftarrow f_{I_i}$
- סיום: הוצר G .

זמן ריצה: $O(n \log n)$ אתחול: $O(n)$ סה"כ: $O(n \log n)$

האלגוריתם החדש שקול לאלגוריתם המקורי. קבל שלם (האלגוריתם החדש קוחר השלימה P זמן סיום נמוך ביותר מבין השלימות שלא מתנגשות P).

הנחה ראשונית: קתחילג שלם i מתקיים $I_i \in G$ או $I_j \in G$ מתנגש P השלימה P .

קליט חלוקה (השלימה)

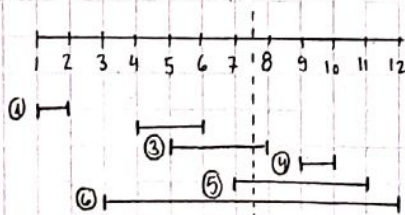
קלט: אוסף של n השלימה. S_i ופח f_i (הוא ופח (S_i, f_i) $0 \leq S_i < f_i$).

הצגה חוק: חלוקה של הוולס לקבוצות חוקיות G_1, \dots, G_d כך ש: $\bigcup_{i=1}^d G_i = \{1, \dots, n\}$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

שלימה (הצגה חוקי P מספר קבוצות מינימלי בתחלקה).

החשך - הרצאה 4

דוגמה:



i	1	2	3	4	5	6
S_i	1	4	5	9	7	3
f_i	2	6	8	10	11	12

התבוננות חוקיים:

- $\{1, 6\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}$
- $\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}, \{6\}$

נרצוה 2 אנצורית מוס חתנים אלה:

- (אנצורית של חתנים) $O(|E| \log |V|)$
- (אנצורית של חתנים) $O(|E| \log |V|)$
- אופן נקודת חתנים מיושם AG יתר $O(|E| + |V| \log |V|)$

הרצאה 5

קביעת על פורט מינימום - המשימה

- קט: $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, $G=(V, E)$ קטור וממוקט

- (מטון חוקי): על פורט $T=(V, E_T)$ של G .

- $w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$ קטור מינימום

משפט 2: יהי $T=(V, E_T)$ על פורט של $G=(V, E)$, תהי $e \in E \setminus E_T$.
אם קטור $H=(V, E_T \cup \{e\})$ קטור מינימום, C וכל $e' \in C$,
הקטור $T'=(V, (E_T \cup \{e\}) \setminus \{e'\})$ על פורט של G .

האלגוריתם של Kruskal:

האלגוריתם של קרוסקל "מבדל" על פורט.
מחזיקה, כל הקדקדוקים שיהיו וכל קט שלם נקמות קטת קטת
מיותר מדין הקטתות שלם נשקטו דו עו, וכל אינה סוכרת מכלל
על הער, וכל ממוקטת נכלל.

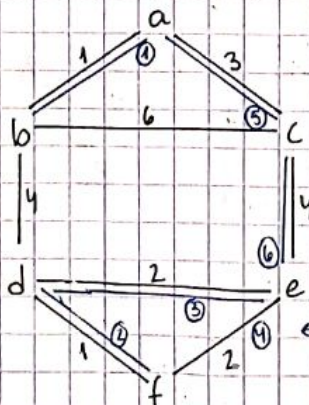
- קט: $G=(V, E, w)$ קטור וכל ממוקט

- אחרות: $F \leftarrow E$: קטות הנכללות שלם נמנו על החזקן
 $B \leftarrow \emptyset$: קטות הנכללות שנמנו על החזקן

- קט: B על $|B| < |V| - 1$ קט:
1. הוצא $F \leftarrow F \setminus B$ קטת קטת ונסמנו קט
2. אם $e \in F$ וכל סוכרת מכלל P הקט (V, B) קטת
 $B \leftarrow B \cup \{e\}$

- פיו: החזק (V, B)

דוגמה:



מקטו כלל
שלם באחרות.

כלל ממוקטת -
כלל סוכרת מכלל!

משפט: האלגוריתם של קרוסקל מחזיר על פורט מינימום של G .

הערה נוספת: קט שלם רכלת האחרות, ויהי $T=(V, E_T)$ קטות
את קטות הנכללות שנמנו על החזקן B נכלל
($B \subseteq E$)

הוכחה. המשפט: • האינדוקציה חזרה סדורה לא יותר מ-1 צדדים כי קטן
 שם נגדית מ-F. צד אחד.
 • האינדוקציה לא נחלה. נניח בשלילה ש $F = \emptyset$ אכן
 $|B| < |V| - 1$ נבדוק קטן מהם.
 איש הסתמך הנושאת, קיים עצם $T = (V, E_T)$ ומכאן
 את B.
 כיון ש $|E_T| = |V| - 1$ ו- $|B| < |V| - 1$, נקנה כי קיימת
 צד $e \in E_T \setminus B$ לא סודרת מעבר על B
 כי $B \subseteq E_T$ ו- e לא סודרת מעבר על E_T ,
 סתירה לכך שהאינדוקציה שלם אחת ואלו הוסיף אותה
 B.
 • קיימים הרבה, הקדמה B מובלת קטן לשון.
 $T = (V, E_T)$ איש סתם נשאת. איש משפט 1.
 $|E_T| = |V| - 1$ איש תנאי עצירת העליון מתקיים
 $|B| = |V| - 1$ קיבלנו כי $|B| = |E_T|$ ו- $B \subseteq E_T$
 $B = E_T$ ולכן (v, B) עצם של G כנדרש. ■

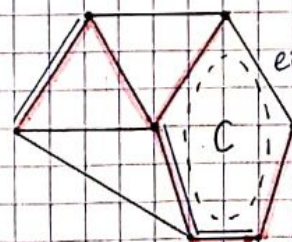
הוכחת טענה נשאת: קיינוקציה על שלמי האינדוקציה, i.
 נסמן B_i את קבוצת הצלחות שיתור הומצון ביחס
 העסק ה-i. (נשיא $\forall i$ $|B_i| \leq 1$)

ביס: $B_0 = \emptyset$ ומובלת קטן עצם של G.

• הוכחה האינדוקציה: (קיים עצם $T = (V, E_T)$ ומכאן את
 קבוצת הקשיות שיתורו על ביס העסק ה-i:
 $B_{i-1} \subseteq E_T$

• צד: תהי e_i הצד הנשקף בתחילת העסק ה-i.
 • אכן e_i סודרת מעבר על (v, B_{i-1}) איש.
 $B_i = B_{i-1}$ והצד T מהו מוקים את הטענה.
 • אחת, e_i לא סודרת מעבר על הקשיות
 $B_i = B_{i-1} \cup \{e_i\}$ ולכן
 מקרה 1: $e_i \in E_T$ - סימון
 מקרה 2: $e_i \notin E_T$

תימות הצד קטן זה
 נראות כך:



נמנע הצד $(v, E_T \cup \{e_i\})$.
 הצד זה הים מעבר C, $e_i \in C$
 - בצלחת $\{e_i\}$ קיימת השת B-1 ו- $e \in E_T \setminus B_{i-1}$
 אחת, B קטנת המעבר שיתור B-1
 וזכור זה לא יתכן כי e_i אינו סודרת
 מעבר על צלחת B-1. הצלחות e_i ו-
 מקיימות את תנאי המשפט 2 ולכן מתקיים
 כי האינדוקציה $T^* = (V, E_T \cup \{e_i\})$ הוסיף על של G.
 - נראה כי $B_i \subseteq E_T^*$
 יצא כי $B_{i-1} \subseteq E_T$ וכן $e_i \notin B_{i-1}$ (מקצרות)
 $B_i = B_{i-1} \cup \{e_i\} \subseteq (E_T \cup \{e_i\}) = E_T^*$
 - נשת כי T^* קטנת מוקים.

אינדוקציה: מה כולת F בתחילת העסק?
 F הקשיות B שלא סודרת מעבר על
 B_{i-1} ואינו B-1 (שום צד קשיות) כי
 F קטן על, אכן אינו F סימן שכבר
 נשקף צד האינדוקציה וזהו היה צריך להוסיף
 אותה, קטנתה לך שאינה B-1
 נקנה מיד שיתורית העסק, F מובלת את e_i
 ואת e . האינדוקציה סודרת את הקשת הקנה
 קטנת ולכן $w(e) \leq w(e_i)$ נסין כי
 ■ ולכן $w(T^*) = w(T) + w(e_i) - w(e) \leq w(T)$

קבץ של קבוצות (V, B) הנו על פניו קבץ של קבוצות
 $e \in B$ וכל e אינה סוארת של e .
 $e = (u, v)$ סוארת של (u, v) $\Leftrightarrow u \sim v$ (מכאן)
 קבוצת רכיב קשורה (V, B)
 נשמר במקנה הנתונים union-find כך למימוש בקלות.
 כל רכיב קשורה / קבץ מופיע בקבוצה נפרדת.

- אחרת - E ונתון F כשיטה עם סדר היתרון
 $B \leftarrow \emptyset$
 $\forall v \in V$ קבץ $\text{make-set}(v)$

- קבץ B $|B| < |V| - 1$ קבץ
 תהי $e = (u, v)$ קבץ (מכאן) F .
 $\text{find-set}(u) \neq \text{find-set}(v)$ קבץ
 $B \leftarrow B \cup \{e\}$
 $\text{union}(\text{find-set}(u), \text{find-set}(v)) \neq$

- מיון - (V, B) החדש

ניתוח זמן ריצה:

- מיון: $O(|E| \log |E|)$
 קבוצת $|E|$: $O(|E|)$
 union-find: קניות סתם, נראה כמו קבוצה לני אחרת את
 מקנה הנתונים union-find:
 make-set יש $|V|$ פעולות של $\#$
 union יש $|V| - 1$ פעולות של $\#$
 find-set יש $|E|$ פעולות של $\#$

- תוצאה: עבור מקנה הנתונים ומתקבץ union-find קבץ של
 קבוצה מתחשבת כל קבוצה ואיחוד קבוצות נעשה עם
 rank קבוצה קבוצה מתחשבת קבוצה מ פעולות
 של make , union , find ומתקבץ אחרת n
 פעולות של make , union , find הריבוי הכלי (הוא)
 $O(m \log n)$

- אחרת: $m = O(|E|)$ ו $n = O(|V|)$ אז זמן של מתקבץ $O(|E| \log |V|)$

$$O(|E| \log |E| + |E| + |E| \log |V|) = O(|E| \log |E|) = \uparrow$$

$$|E| \geq |V| - 1$$

$$= O(|E| \log |V|)$$

$$|E| < |V|^2 \rightarrow \log |E| < 2 \log |V|$$

האלגוריתם של Prim

האלגוריתם מחזיר את G כאשר G הוא גרף לא מחובר.

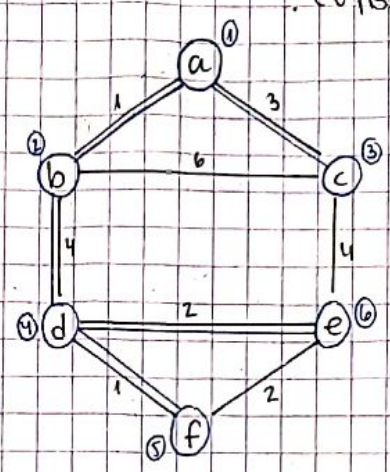
- איתחול: $S = \{v\} : v \in V$ קבוצת כל המוקדים
 $B = \emptyset$: קבוצת הקשתות

- זרימה: B זרימה $|B| < |V| - 1$ קריטריון

א. בחר קשת $e = (u, v)$ הנה ביותר מחוברת
 (במקרה, קשת הנה קשת $u \in S$ ו- $v \in V \setminus S$)
 ב. $B \leftarrow B \cup \{e\}$
 ג. $S \leftarrow S \cup \{v\}$

- סיום: (נחז) (V, B)

דוגמה:



מסלול של G
 שלם האלגוריתם

הרצאה 6

האלגוריתם של Prim - חזרה

הזכרה: עבור $G=(V,E)$, $(S,V \setminus S)$ תיקוף חתך A אם $\emptyset \neq S \subset V$ צומי חלוקה של קורקוזי (הצל 2 קיבוצי A) תיקוף.
 $e=(u,v)$ תיקוף קשת חוצה חתך (קשת כחתך) אם $u \in S, v \in V \setminus S$.

משפט: האלגוריתם של Prim מחזיר עץ G .

טענת בצר: קבל עץ $T=(V,E_T)$ קיים עץ $T=(V,E_T)$ של G המכיל את B (במקרה $B \subseteq E_T$)

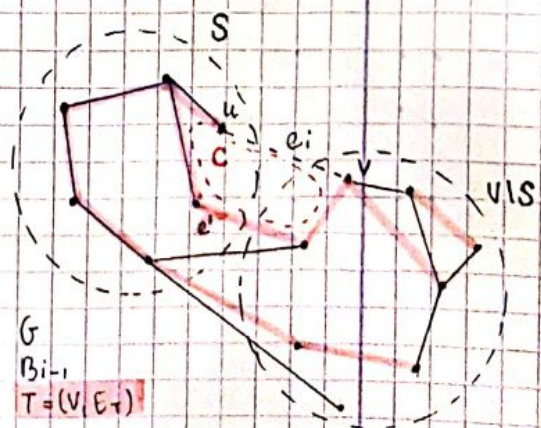
הוכחת המשפט:

- האלגוריתם לא נקטע:
 קבל עץ, האלגוריתם מוסיף קשת $e=(u,v)$ כך ש- $u \in S-1, v \in V \setminus S-1$ אם הצלנו לשלב $i \leq |V|-1$ כך שקשת e לא תיפגש (בלימוד החתך "רוק מקשתות חוצות", אז מתקבל כי $\emptyset \neq S \subset V$ רבים קשתות קט, קשתות וכן שט קטיר. האלגוריתם לא נקטע, וכל עץ מוסיפים לב קשת, ולכן הולאוו תסתיים לאחר $|V|-1$ איטרציות.
- האלגוריתם מחזיר עץ $T=(V,E_T)$ קיים עץ $T=(V,E_T)$ של G המכיל את B (במקרה $B \subseteq E_T$)
 נשי טענת הצר, בסיוע הולאוו קיים עץ $T=(V,E_T)$ של G המכיל את B (במקרה $B \subseteq E_T$)
 $|E_T|=|V|-1$ ולכן T עץ.
 אין $B=E_T$ וכן $(V,B)=(V,E_T)$.

הוכחת טענת בצר:

- באינדוקציה על ענפי האלגוריתם, i :
 נסמן B_i את קבוצת i הצלצות הראשונות שנבחרו על האלגוריתם עד לסיום השלב i .
 קסס: $i=0, B_0=\emptyset$ וכל עץ $T=(V,E_T)$ של G מתקיים $B_0 \subseteq E_T$.
- הנחת האינדוקציה: נניח כי בסיום האיטרציה $i-1$, קיים עץ $T=(V,E_T)$ של G המכיל את B_{i-1} .
- בצע האינדוקציה: תתי e_i הקשת שנבחרה בשלב i . אז $B_i = B_{i-1} \cup \{e_i\}$ (נראה כי קיים עץ T המכיל את B_i).

מקרה 1: אם $e_i \in E_T$ אז סיימנו.
מקרה 2: אם $e_i \notin E_T$.
 נקבע קצרה $H=(V, E_T \cup \{e_i\})$ קיים ענף C H P $e_i \in C$ כי T על (נשי משפט 2) נסמן $e_i=(u,v)$ את המסלול $P=C \setminus \{e_i\}$ כך $P=(u=w_0, w_1, \dots, w_k=v)$ (נסמן $w_i=w_i(u,v)$ את הקשת הראשונה P $w_i \in S$ ויסתיים $V \setminus S$ קשת חוצה חתך. (האלגוריתם בחר את e_i קשת חוצה חתך קלה ביותר ולכן $w(e_i) \leq w(e)$ $w(T') = w(T) + w(e_i) - w(e) \leq w(T)$ ≤ 0



מיוש (אסי): כתב אחד מ-1-171 חשבונים, (לדבור על
הקשמה ונמצא ישר קהל בימי כותח.
סה"כ: $O(171 \cdot 171)$

- * (ניצב) את הזרע כרשיט שנתית
- * (נמצא) אגד קינאה של שייכות חוקר/קוראים S-I.

$$\text{map } r \in V, S \in \{r\} : \text{innc} - B \in \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{מחלקות } (v, w) \\ \text{מחלקות } (v, w) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{קצות } v, w \in E \text{ פתוחות} \\ \text{קצות } v, w \notin E \text{ סגורות} \end{array}$$

$ E \geq n$	מחזיקה QM ExtractMin	של מחזורי $ V -1$	-
		$O(V \log E)$	נכון:
כן	לפחות קטן מ- n של היותו פד אחר.	QM מציאת	-
	הצורה / הנחה.	של היותו זיהוי מחזורי	
		$O(E \log E)$	נכון:

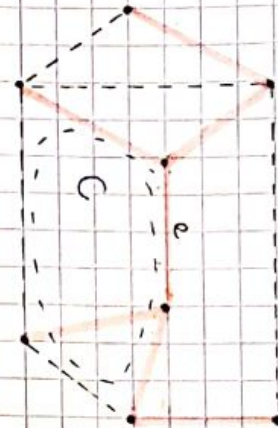
* תזם מיון	לפי יורג	לפי	לפי	(פיוסוקא)
הנמן	הכול	מיון	סה	היו
				$O(E + V \log V)$

מערכת קבלת האזרים: יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, לא מכוון ומאונקט.
 תהי e זוג בקצה קוטר קטע C כלשהו ב- G . כלומר,
 $e \in C$ מתקיים $w(e) \geq w(e')$ אם קיים e'
 D של G שלא מכיל את e .

הוכחת קבלת האזרים: יהי $T=(V,E_T)$ עץ של G .

אם $e \in E_T$ אז סיימנו
 אחרת $e \in E \setminus E_T$. נחזיק קצה $H=(V, E_T \setminus \{e\})$
 ונסמן $e=(u,v)$. קצה H קיימים שם
 רכיבי קשירות T_u, T_v כאשר $u \in T_u$ ו- $v \in T_v$
 קטע C הנתון קיימים 2 מסלולים המחקרים את
 u אל v .

הראשון: $P_1=(u,v)$, כומר הצלע e .
 השני: $P_2=(u=w_1, w_2, \dots, w_k=v)$, כומר הצלע C .
 מסלול זה מחיל קרובים P_u ומסתיים בקרוב P_v .
 לכן קיימת קו קטע $(w_i, w_{i+1}) = e'$ ק ש-
 $w_i \in T_u$ ו- $w_{i+1} \in T_v$.
 מכיוון ש $e' \in C$ מתקיים $w(e) \leq w(e')$.
 הצד $(V, E_T \setminus \{e\}) = T'$ הוא עץ ושי משט
 2 ומתקיים $w(T') = w(T) - w(e) + w(e') \leq w(T)$.
 ולכן יד עץ שאינו מכיל את e בנדרש.



האלגוריתם האזרים:

קרייט גרף, כל עוד קיים מלבד קצה, קצר קו קטע בקצה קוטר
 והסר אותו מחזרה.

הרצאה 7

תכנון דינמי - Dynamic Programming

אם אנחנו רוצים למצוא פתרון מהיר יותר, כי פתרון הוא אופטימלי ואם
חשוב שיהיה של פתרונות אופטימליים אחרים, קטנים יותר, כדאי לשקול
טכניקה זו.

פצצה (השליטה) הממוקדת

- מופע: אוסף של n פצצות, $S = \{1, 2, \dots, n\}$
כל פצצה היא הכוללת (s_i, f_i) , $s_i < f_i$ - זמן התחלה וסיום.
נמנה לכל פצצה משקל w_i .

- פתרון חוקי: $I \subseteq S$ של פצצות צרות.

- יש למצוא: פתרון חוקי $I \subseteq S$ כך שמשקל $w(I) = \sum_{i \in I} w_i$ מקסימלי.

מקרים פרטיים:

פצצה השליטה: לכל i , $w_i = 1$ (פתרון עם אמצעים חזק)
$w_i = f_i - s_i$ - המרחק שיש לאורך השליטה.

פתרון נאיבי: לכל I קבוצה $I \subseteq S$, נבדוק האם היא חוקית,
ונחזיר I חוקית במשקל מקסימלי.
זמן ריצה: 2^n .

ש. האם קיים פתרון חזק יותר? אפילו?
ת. הפצצה היחידה הכוללת של פצצות השליטה, וכל פצצה הקטנה
שנכנסת בפצצה השליטה (נכשלים כאן).
ואי ידוע על פתרון חזק יותר.

שלבם בתכנון אמצעים מקומם - תכנון דינמי:

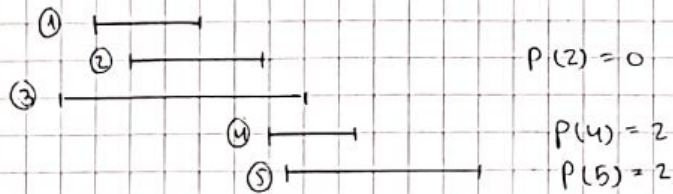
1. נוסח נוסחה מקנה והוכחה:
הצורה תהי הפצצה באופן מינימלי והצורה OPT
(השברון הדינמי) של OPT (פצצה).
נוסח נוסחה מקנה כולל מקרה בסיס ומצאנו את
הפתרון.
הוכחה נוסחה המקנה.

2. קצת אמצעים על הנוסחה

3. הוכחה נכונה וניתוח זמן ריצה.

נוסחה מקנה:
כיצד? (כאן פתרון אופטימלי?)
- נניח כי הנוסחה SP מתאימה לשיעור $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$
- 'חי' 0 נכנסון אופטימלי עבור הנוסחה $S = \{1, \dots, n\}$
אחרי מחיקתה הנוסחה מתאימה:
1. $n \neq 0$
2. $n \in 0$

- מה ניתן לומר על 0 קבל את המסקנה?
1. $0 \neq n$. 0 פתרון אופטימלי עבור $\{1, \dots, n\}$ שאינו מכיל את n .
 0 פתרון חוקי עבור המושל $\{1, \dots, n-1\}$.
 0 אופטימלי עבור המושל $\{1, \dots, n-1\}$.
 $0 \in S_n$ לפי 0 המושל 0 מתחילתו לא אחרי n (כך זה לא מתחילתו אלא ב- n).
 $P(j)$ אף המושל שמכיל את n SP מיון המושל שמכיל את n S_n
 2. $0 \in S_n$ לפי 0 המושל 0 מתחילתו לא אחרי n (כך זה לא מתחילתו אלא ב- n).
 $P(j)$ אף המושל שמכיל את n SP מיון המושל שמכיל את n S_n



לכן, $\{1, \dots, n\}$ פתרון חוקי עבור המושל $\{1, \dots, n\}$ קנוסל הוא פתרון אופטימלי מושל $\{1, \dots, n\}$

הצורה הקובצת (המונחית) את קצוה אופטימלית OPT עבורה:
 לכל $0 \leq j \leq n$ נצטרך את תת המידה עבור המושל $\{1, \dots, j\}$.
 בצורה פורמלית:
 נצטרך את הקובצת (המונחית) את קצוה $\{1, \dots, j\}$ עבור:

$$Sol(j) = \{I \mid I \text{ פתרון חוקי}, I \subseteq \{1, \dots, j\}\}$$

$$OPT(j) = \max_{I \in Sol(j)} \{w(I)\}$$

נוסחה רקורסית:

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \max \{OPT(j-1), w_j + OPT(p(j))\} & j > 0 \end{cases}$$

נשים לב: $P(j) < j$

אנו מחפשים למצוא פתרון $I \in Sol(n)$ במעטף $OPT(n)$.

הוכחה נוספת (המקרה):

טענה 1: כל השתנות בקובצת $Sol(j)$ שלא מכיל את j ,
 היא קבוצת הקובצת $Sol(j-1)$.

טענה 2: כל השתנות בקובצת $Sol(j)$ שמכיל את j ,
 היא קבוצת הקובצת (המונחית) את j $\{1, \dots, p(j)\}$ $K \in Sol(P(j))$ כאשר

קניית אלגוריתם על ידי תוספת :

find-OPT(j) - אלגוריתם ריקורסיבי :
 if $j=0$, return 0
 else, return $\max\{ \text{find-OPT}(j-1), w_j + \text{find-OPT}(p(j)) \}$

מסקנה : $\text{find-OPT}(n) = \text{OPT}(n)$

לא נוכח כי האלגוריתם לא ייל!

צמן ריצה : האלגוריתם מחשב את כל הקלות מחדש

רק על (מסמך).

ממשל : המורה כי $p(j) = j-2$ מסמך
 חקראות של לשי מסמך פיקטורלי וזה אקספוננציאלי.

- אלגוריתם איטרטיבי : פועל בצורה של bottom-up
 נבטור קלות קטנות ביותר, מן נמצא כחון אפליה
 שלות יור, על שנעבור את הקלות המורות.

- מין את S לשי כמין סוף קצר לא יור
- נחשב את $p(j)$ לכל j
- נאמר מדרך M של $n+1$ אופס

Iter-find-OPT

$M[0] = 0$

for $j = 1, \dots, n$ do

$M[j] = \max \{ M[j-1], w_j + M[p(j)] \}$

הוכחת נכונות :

- קסום מריצה, אם $0 \leq j \leq n$ מתקיים : $M[j] = \text{OPT}[j]$
- קב של כי האלגוריתם מחשב את $M[j]$, והוא $M[p(j)]$, $M[j-1]$ קח האלגוריתם לשה שימוש, כי חושבו בעליון מוקדיו יור.
- צור כי הולאה רצו מ-1 ל-n כאשר $j < p(j) + 1$.

הוכחה באינדוקציה ישירה - תרגול

- ניתח צמן רצה :
- מין S : $O(n \log n)$
 - חישוב $p(j)$: נחשב על חישוב בינארי לשי כמין סוף. אם j נחשב את ת-i (מקסימלי קר ש- $f_i \leq j$).
 - ש ח חישובים ופ אחת עלה $O(\log n)$ ולכן סוף $O(n \log n)$
 - אחור : $O(n)$
 - באלגוריתם ח בצמ, פ אחת בצמן קול, סוף $O(n)$
 - סוף : $O(n \log n)$

מספר הנוסחון : מ

$M[j] = OPT[j]$ "מ"ן $0 \leq j \leq n$ כל M מ"ן n -

Reconstruct (j)

if $j=0$ return \emptyset

if $M[j] \neq M[j-1]$

return $\{j\} \cup \text{Reconstruct}(p(j))$

else

return Reconstruct(j-1)

בעיה האורק:

נתון נכנס לתוכה ה פריטים, למכירה. לקוח ים אורק על P פריטים וזוהי נחש למכור את כל בספר. כיוון שהחנות בחוקר מכירתו הוא רוצה למכור הקומה שקוה במשקל, נאור כל הנתן.

באופן פורמלי:

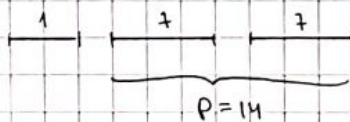
- קלט: אוסף של n פריטים. לפריט i משקל w_i ומחיר p_i . $P = \sum_{i \in I} p_i$
- P = המחיר הכולל. כל הפריטים הם מספרים שלמים אי-שליליים.
- פתרון חוקי: תת קבוצה $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ של פריטים קמחור.
- פלט: פתרון חוקי I במשקל $W(I) = \sum_{i \in I} w_i$ מינימלי, אם קיים כזה.

i	1	2	3	4	5
w_i	7	9	3	10	6
p_i	2	4	5	6	8

$$P = 17$$

- # $I_1 = \{2, 3, 5\}$
 $P(I_1) = 4 + 5 + 8 = 17$
 $W(I_1) = 9 + 3 + 6 = 18$
- # $I_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
 $P(I_2) = 2 + 4 + 5 + 6 = 17$
 $W(I_2) = 7 + 9 + 3 + 10 = 29$

כלי בחירה חמקנים:



לא יצא אלגוריתם חמקן לקלות!

- איננו על משקל מינימלי
- לשי סדר
- לשי משקל
- לשי יחס סדר משקל

← ניסיון (כושל) להעביר את הפעולה האופטימלית:

נתקדם ב $\{1, \dots, j\}$ - n הפריטים הראשונים. עבור $1 \leq j \leq n$ נגדיר:

$$Sol(j) = \{I \mid I \subseteq \{1, \dots, j\} \text{ פתרון חוקי}\}$$

$$OPT(j) = \min_{I \in Sol(j)} W(I) \leftarrow \begin{array}{l} \text{משקל פתרון מינימלי} \\ \text{הוא ב-} \{1, \dots, j\} \\ \text{ולאו} P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} j \notin I \rightarrow I \in Sol(j-1) \\ j \in I \rightarrow I = K \cup \{j\}, K \subseteq \{1, \dots, j-1\} \end{array}$$

האם ניתן למצוא אויב כי $K \in Sol(j-1)$? לא!
 המחיר של K פתר לא יתק P .

← (הזירה תה קטנה או שנייה וסך OPT סקורה:

לכל $0 \leq j \leq n$ ולכל $0 \leq T \leq p$ נזכיר:

$$Sol(j, T) = \{ I \mid P(I) = T, I \subseteq \{1, \dots, j\} \}$$

$$OPT(j, T) = \begin{cases} \min_{I \in Sol(j, T)} w(I) & , Sol(j, T) \neq \emptyset \\ \infty & , Sol(j, T) = \emptyset \end{cases}$$

חלוקת קבוצת הפתרונות לתתי קבוצות:

כל $I \in Sol(j, T)$ מקיים בדיוק אחד מהקאים: $j \in I$ או $j \notin I$.

נוסחת הדינמית:

$$OPT(j, T) = \begin{cases} 0 & , j=0, T=0 \\ \infty & , j=0, T>0 \\ OPT(j-1, T) & , p_j > T, j \geq 1 \\ \min \{ OPT(j-1, T), w_j + OPT(j-1, T-p_j) \} & , j \geq 1, p_j \leq T \end{cases}$$

אנו מעוניינים למצוא פתרון $I \in Sol(n, p)$ של מחיר $OPT(n, p)$ או "לכו קיים" אם אין כזה.

הרצאה 9

בעיית האריות - המשך

הוכחת נכונות נוסחת המכונה:

טענה 1: \mathcal{S} הנתונה בתקופה $\text{sol}(j, T)$ של j מכילים את j הם בדיוק תקופה $\text{sol}(j-1, T)$.

טענה 2: אם $p_j \leq T$, כל הנתונות בתקופה $\text{sol}(j, T)$ הכוללים את j הם בדיוק קבוצת הנתונות $\mathcal{K} \cup \{j\}$ כך ש $K \in \text{sol}(j-1, T-p_j)$.

אבחנה: יהי $(j, T) \in \text{sol}(j, T)$ עבור $j > 0$.

אם $p_j > T$, לא קיים פתרון חוקי המכיל את j ולכן I כריטונה 1.

אחרת, $p_j \leq T$, אם $j \notin I$ אז I פתרון כריטונה 1, אחרת $j \in I$ פתרון כריטונה 2.

← לא הוכחה
(נשי העברה)

הוכחת הנוסחה:

א. $j=0, T=0$: ופני ההעברה מתקיים $\text{sol}(0,0)=\{\emptyset\}$ ומשקל הפתרון חוקי הוא 0.

ב. $j=0, T>0$: ופני העברה, $\text{sol}(0,T)=\emptyset$ ופני העברה של $\text{OPT}(0,T)=\infty$ מתקיים.

ג. $p_j > T, j > 0$: ופני טענה 2, לא קיים פתרון \mathcal{K} - $\text{sol}(j,T)$ המכיל את j . כלומר, כל פתרון \mathcal{K} - $\text{sol}(j,T)$ לא מכיל את j , ולכן מטענה 1 מתקיים: $\text{sol}(j,T) = \text{sol}(j-1,T)$

$$\text{OPT}(j,T) = \min_{I \in \text{sol}(j,T)} W(I) = \min_{I \in \text{sol}(j-1,T)} W(I) = \text{OPT}(j-1,T)$$

3. $p_j \leq T, j > 0$: ופני אבחנה, כל פתרון \mathcal{K} - $\text{sol}(j,T)$ מכיל את j או לא מכיל את j .

העברה

$$\text{OPT}(j,T) = \min_{I \in \text{sol}(j,T)} W(I) = \min_{\substack{I \in \text{sol}(j,T) \\ j \notin I}} W(I), \min_{\substack{I \in \text{sol}(j,T) \\ j \in I}} W(I) =$$

$$= \min \left\{ \min_{I \in \text{sol}(j-1,T)} W(I), \min_{K \in \text{sol}(j-1, T-p_j)} W(K \cup \{j\}) \right\} =$$

העברה

$$= \min \{ \text{OPT}(j-1,T), w_j + \text{OPT}(j-1, T-p_j) \}$$

טענה 2: נסמן $A = K \cup \{j\}$, $K \in \text{sol}(j-1, T-p_j)$ ו $B = \{I \mid I \in \text{sol}(j,T), j \in I\}$

עמם קאמזאור הנתן ר - כיוונית:

$A \subseteq B$: יהי $I \in A$. אזי $I = K \cup \{j\}$ עבור $K \in \text{sol}(j-1, T-p_j)$ ו $I \subseteq \{1, \dots, j\}$ אז $K \subseteq \{1, \dots, j-1\}$ ופני ההעברה, $j-1$, $K \in \text{sol}(j-1, T-p_j)$ ופני $p_j \leq T$ ולכן $p(I) = p(K \cup \{j\}) = p(K) + p_j = T - p_j + p_j = T$ קיבלנו כי $I \in \text{sol}(j,T)$ וכן $j \in I$ ולכן $I \in B$.

$j \in I$ וכן $I \in \text{Sol}(j, T)$ וכן $I \in B$ ומכאן $B \subseteq A$
 $I = K \cup \{j\}$ וכן $K = I \setminus \{j\}$ וכן $K \subseteq \{1, \dots, j-1\}$ וכן j אינו מופיע ב-"סדרה" $I \in \{1, \dots, j\}$
 וכן $P(I) = T$ וכן $P(K) = P(I \setminus \{j\}) = P(I) - p_j = T - p_j$
 ולכן $K \in \text{Sol}(j-1, T-p_j)$ ומכאן

אמצעות אינטרנט:

$1 \leq T \leq p$ \forall $M[0, T] = \infty$ \forall $M[0, 0] = 0$: סימנים -
 $\forall j = 1, \dots, n$ \forall : פריטים -
 $\forall T = 0, \dots, p$ \forall :
 $M[j, T] = M[j-1, T]$: $p_j > T$ אם
 $\forall (p_j \leq T)$ סימנים
 $M[j, T] = \min\{M[j-1, T], w_j + M[j-1, T-p_j]\}$
 . מ. נ. ו. נ. : פ. 0 -

הזכרת נכונות:

החכמה היא ציון ציון

נ'תות מן רעב

Scanned by CamScanner

אלגוריתם למצור אבניית המגדל:

הנחה: נתון מטריצה M כך שמקיים: $M[j, T] = OPT(j, T)$ לכל $0 \leq T \leq P$, $0 \leq j \leq n$
 נניח אם האלגוריתם סבור (n, P) אז $M[n, P] = \infty$ אחרת $M[n, P] = \infty$ אחרת.
 #

אלגוריתם למצור הקורסיבי:

```

Reconstruct(j, T)
if (j=0 & T=0) return 0
if (j=0 & T>0) return null
if (M[j, T] != M[j-1, T])
    return {j} v Reconstruct(j-1, T-Pj)
else
    return Reconstruct(j-1, T)
    
```

משפט: האלגוריתם ממצא (מגון אופטימלי) לכל $M[j, T] \neq \infty$ לכל $0 \leq j \leq n$, $0 \leq T \leq P$
 הקריאה $Reconstruct(j, T)$ מחזירה מגון $I \in Sol(j, T)$ שמקיים $M[j, T]$

הוכחת משפט:

אם $Reconstruct(n, P)$ חזרה, הקריאה $M[n, P]$ מקבלת $I \in Sol(n, P)$ שמקיים $M[n, P] = OPT(n, P)$ כנדרש.

ניתוח זמן תצורה - אלגוריתם למצור:

הקריאה $Reconstruct(n, P)$ מתבצעת $O(n)$ קריאות רקורסיביות.
 כל קריאה היא $O(1)$ (כל קריאה רקורסיבית היא קריאה ממונה)
 ← סה"כ: $O(n)$

זמן תצורה כללי:

אלגוריתם איטרטיבי: $O(n \cdot P)$
 אלגוריתם למצור: $O(n)$
 ← סה"כ: $O(n \cdot P)$

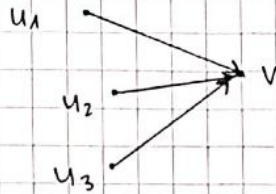
אופטימליות: זמן תצורה אקספוננציאלי בקודקוד הקודקוד

הוכחה: הקודקוד מורכב מ- n מקרים ומעקפים והמספר P (מגון 2^b או מספר הקטנים הנדרשים) אינו יכול להיות $O(n \cdot b)$ זמן תצורה "זול" $O(n \cdot b)$ זמן תצורה $O(n \cdot 2^b)$

ישראלים קלים ביותר בשל מכוון מקוריות S ו-t

מה שמרמז שיש קווי שוויון?

$$\rightarrow \text{OPT}(v) = \begin{cases} 0 & v = S \\ \min_{(u,v) \in E} \{ \text{OPT}(u) + w(u,v) \} & v \neq S \end{cases}$$



הרצאה 10

חסכוניים קלים ביותר בגרפים
מבונים עם חקור יחיד

משפט: משקל של מסלול הינו סך משקולות הרצאות במסלול.

(הצדקה): פונקציה המרחק δ הינה:

$$\delta(s, v) = \begin{cases} \infty & \text{אם לא קיים מסלול מ-} s \text{ ל-} v \\ \text{משקל מסלול קל ביותר מ-} s \text{ ל-} v & \text{אחרת,} \end{cases}$$

* הערה: קטורה וקיים מסלול שכלי במסלול לטובו מ- s ל- v , אז
 δ לא מוגדרת היטב.
קטורה כזו, נקרא $\delta(s, v) = -\infty$

קטורה מציאה מסלולים קלים ביותר
ממקור יחיד לכלל מכונן

- קט: $G = (V, E)$ מכונן, $s \in V$ תחילת מקור, $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה משקל.

- יש למצוא: לכל $v \in V$, מסלול קל ביותר מ- s ל- v ב- G, A, P .

* הערה: ראשית נחשב מרחקים לכל $v \in V$ ואח"כ נלמד את
המסלולים עצמם על ידי שימוש במרחקים הנ"ל.

אבחנות:

1. אם $w(e) = c$ לכל $e \in E$ (c קבוע), אז המרחק (פשוט) ל- v הוא $\delta(s, v) = c \cdot \text{מסלול}$ (לפי BFS).
2. נניח כי G תחילתית והכלל (משקל) מ- s נייט, אז המרחק ל- v הוא $\delta(s, v) = \text{מסלול}$ (לפי BFS).
3. נניח אך ורק פחיתים מכוננים.
4. קטורה ומשקולות חזק, חיוניות, אז מסלול קל ביותר הינו קונקרטי מסלול (פשוט).
5. קטורה ומשקולות חזק, אי-שליליים, $w(e) \geq 0$ לכל $e \in E$, אז קיים מסלול קל ביותר מ- s ל- v שהינו מסלול (פשוט).

טענה: עבור קט $(u, v) \in E$ מתקיים: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$

$$s \xrightarrow{\delta(s, u)} u \xrightarrow{w(u, v)} v$$

יכול להיות שקיים מסלול קל יותר

תכנית חתירה של מסלול קצר ביותר

טענה: תת מסלול של מסלול קצר ביותר הינו מסלול קצר ביותר.

הוכחה: יהי $P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ מסלול קצר ביותר מ v ל v .
 לכל $1 \leq i \leq k$ המסלול $P_{i,j} = \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ הינו מסלול קצר ביותר מ v_i ל v_j .
 זאת כי אם קיים מסלול קצר יותר $P'_{i,j}$ מ $P_{i,j}$ מ v_i ל v_j , ניתן למצוא מסלול קצר יותר מ P מ v ל v על ידי שילוב P' עם $P_{1,i}$ ו $P_{j,k}$.
 אך זהות $P_{i,j}$ קצרה מ $P_{i,j}$ וקבל מסלול קצר יותר מ P , בסתירה לכך שהתחלנו עם מסלול קצר ביותר.

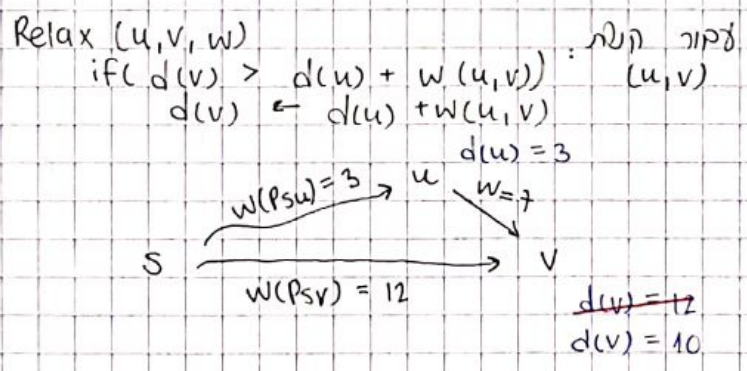
מסקנה: ריבוי של מסלול קצר ביותר הינו מסלול קצר ביותר.
 קבעו מקרים: $\delta(v_1, v_k) = \delta(v_1, v_{k-1}) + w(v_{k-1}, v_k)$

הצורה עבור אלגוריתמים קטנים

(האלגוריתם מקווסט (Relax))

1. לכל קודקוד $v \in V$ נשדר שדה $d(v)$ שמשמר את מרחק מסלול קצר ביותר שמצאנו עד לתה.
 יאומת ∞ ואם $d(v) < \infty$ אז $d(v)$ מציג את מסלול קצר ביותר מ s ל v .
 בסיס האלגוריתם: $d(v) = \delta(s, v)$

2. פד $d(v)$ יעדין אך ורק בפעולה Relax.
 בפעולה $Relax(u, v, w)$ אנו קודקים האם ניתן לשפר מסלול נוכחי מ s ל v על ידי מסלול קצר יותר העובר דרך u כאשר קיימת קשר (u, v) .

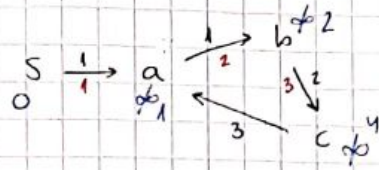


בפעולה Relax, עק $d(v)$ יכל רק לרדת.
 # קיצע שלמות (בפעולה) מקיים:
 $d(v) = \min \{ d(v), d(u) + w(u, v) \} \leq d(u) + w(u, v)$
 ↑
 יתכן שכל יתה נון בפעולה מאוחרת יותר.

הצורה: אלגוריתם יקרא אלגוריתם מקווסט
 - האומת יתה: לכל $v \in V$, $d(s) = 0, d(v) = \infty$
 - פד $d(v)$ יעדין אך ורק יוקוסר (פעולה) Relax.

אלגוריתם גרי:

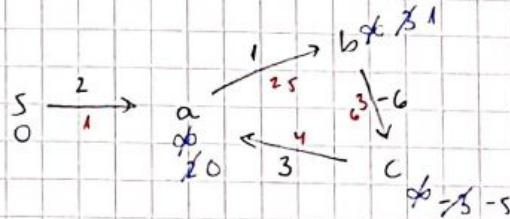
- איתחול: $d(s) = 0$, $d(v) = \infty$, $v \in V$ לכל
- זרימה: אם קיימת קשת (u, v) בקדור $d(v) > d(u) + w(u, v)$
- אצ' קצ' $Relax(u, v, w)$ לכל $v \in V$
- סיום: הוסר $d(v)$ לכל $v \in V$



d
שלם

דוגמה:

← האלגוריתם מחזיר את הערכים הנכונים.



← מעקל העגל הוא -2 ולכן ה-2 "מפספס" על אינסוף והאלגוריתם לא יצבור. נשים לב: ככל שאנחנו על מעקל שעלי האלגוריתם לא יצבור!

טענה נשמרת לקור אלגוריתם מחוסס פסולת Relax: ככל שאנחנו באמצעות, אם $d(v) < \infty$ אז $d(v)$ מעקל של האלגוריתם.

(הוכחה: קאנקורציה על מעקל העגל) = מספר (פסולת ה-Relax) - קיסים: ראשון, s הוא הקדור היחיד $d(s) < \infty$. מתקיים כי $d(s) = 0$ ואכן קיים מסלול מן s למעקל s - המסלול הריק. - נניח כי על סוף העגל ה-1-2 הוספה נכונה לכל $v \in V$. תהי (u, v) הצלע הנשקלת בעגל ה-1-2. אם $x \neq v$, $d(x)$ לא משתנה ולכן מסתיק להוכיח את הטענה לקדור v. - אם פסולת ה-Relax מן מעקל אחר $d(v)$, אז הטענה מתקיימת לכל הלאה. - אחרת, קסרז העגל ה-1-2 מתקיים: $d(v) = d(u) + w(u, v)$. מאחר ופסולת ה-Relax עיצבנה את $d(v)$, מתקיים במחילה העגל כי $d(u) < \infty$. לפי ה"א קיים מסלול P מן s אל u המעקל $d(u)$ נוסף למסלול P את הצלע (u, v) ונקבל מסלול $P' = P \cup v$ ומעקל $w(P') = w(P) + w(u, v) = d(u) + w(u, v) = d(v)$

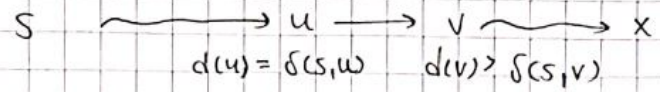
מסלול (קסרז תחתון על סוף $d(v)$): ככל שאנחנו האלגוריתם ולכל $v \in V$ מתקיים $d(v) \geq \delta(s, v)$

(הוכחה: אם $d(v) = \infty$, הטענה מתקיימת. אחרת, $d(v) < \infty$ ולפי הטענה הנשמרת קיים מסלול מן s ל-v המעקל $d(v)$ ולכן לפי העצרת s מתקיים: $d(v) \geq \delta(s, v)$

משפט ניומן (האלגוריתם הקצר):

אם האלגוריתם קצר, כלומר, לכל קשת (u, v) מתקיים $d(v) \leq d(u) + w(u, v)$ אז $d(v) = \delta(s, v)$.

הוכחה: נניח בהנחה כי האלגוריתם קצר וקיים $x \in V$ עבורו $d(x) \neq \delta(s, x)$. נבחר מינימום x כך שיהיה $d(x) \neq \delta(s, x)$. נקרא v הקודם ל x (הראשון במסלול לקראת x).
 $d(v) \neq \delta(s, v)$



לפי הניחה נשתמש במתקיים $d(v) > \delta(s, v)$. מכאן נובע כי $d(u) = \delta(s, u)$ (מתקיים).
 אז $d(v) > \delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v) = d(u) + w(u, v)$.
 אבל $d(v) \leq d(u) + w(u, v)$ (מתקיים).
 נקבל $d(v) = d(u) + w(u, v) = \delta(s, u) + w(u, v) = \delta(s, v)$.

(2) $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$
 (1) $d(v) \leq d(u) + w(u, v) = \delta(s, u) + w(u, v) = \delta(s, v)$
 (2) $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$
 מכאן נובע כי $d(v) = \delta(s, v)$.

אלגוריתם דיקסטר - DIJKSTRA

הנחה: משקלי צלע השרץ אי שוליים.

רשומה: האלגוריתם מחזק קבוצת הקודמים S לקראת חלוקת האמת. כל שלב שלב נכנסו קודמים מתוך הקודמים שאינם d מוקדמים. וננסה להוסיף אל מכליכם את שלביו של הקודמים שאינם S .
 Relax

- קשת: $(u, v) \in E$, $s \in V$ קודמים מוקד, $w: E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$

- אמת: $d(v) = \infty$ לכל $v \in V$, $d(s) = 0$.

- $S \leftarrow \emptyset$ קבוצת הקודמים לקראת חלוקת האמת.
 $Q \leftarrow V$ קבוצת הקודמים שאינם S .

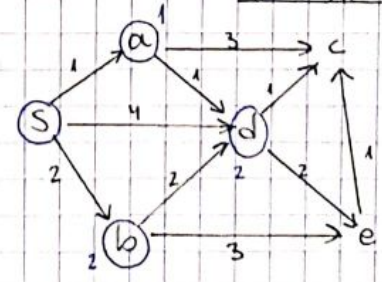
- $u \in Q$ כל $u \in Q$ כך ש $d(u)$ מינימלי.

- $S \leftarrow S \cup \{u\}$ $u \in Q$ כך ש $d(u)$ מינימלי.
 Relax (u, v, w) לכל קשת $(u, v) \in E$ כך ש $u \in S$ ו $v \notin S$.

- סיום: החזר d לכל v .

דוגמה וריכוז:

צומת	מרחק	1 3 3	2 3 3	3 3 3	4 3 3
s	0	0	0	0	0
a	∞	1	1	1	1
b	∞	2	2	2	2
c	∞	∞	$3+1$	4	$2+1$
d	∞	4	$1+1$	2	2
e	∞	∞	∞	$2+3$	$2+2$



הרצאה 11

אלגוריתם דיקסטרה - הסבר

אבחנה: האלגוריתם של דיקסטרה, כאשר הנכנס קורקוז u ל- S , לך $d(u)$ לא משנה יתר.

הסבר: נטלה $Relax(u, v, w)$ מתבצעת אך ורק על קורקוז $v \notin S$.

אבחנה: האלגוריתם של דיקסטרה לאחר קיצוץ נטלה $Relax(u, v, w)$ מתקיים לאורך כל שאר הריבוק כי $d(v) \leq d(u) + w(u, v)$

הסבר: אי השוויון מתקיים מיד לאחר קיצוץ הנטלה. הנטלה וההחלטה לך

הנכנס u ל- S
אפי אבחנה קודמת, ערך $d(u)$ לא ילגה יתר. קנוסף, לך $d(u)$ יכול הן זרז קומע הריבוק, וכן האי שוויון ילגה קומע.

הוכחת נכונת האלגוריתם:

מעט: כסיום הריב האלגוריתם, $d(v) = \delta(s, v)$ לכל $v \in V$
טענת לזר: כאשר קורקוז v נכנס ל- S , מתקיים: $d(v) = \delta(s, v)$

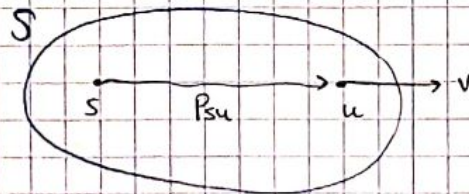
הוכחת המעט: כל שלב מתנס קורקוז יחיד ל- S , לכן לאחר $|V|$ שלבים האלגוריתם ילגז.
מטעם לזר, כל קורקוז נכנס ל- S לך $d(v) = \delta(s, v)$ ולפי אבחנה, לך כל האי משנה לזר סוף הריב האלגוריתם.

הוכחת טענת לזר: באינדוקציה על סדר הנכנס הקורקוזים ל- S .

- **בסיס:** S (הראשון שנכנס ל- S $d(s) = 0$). כיון ש- s אי שלילי, $\delta(s, s) = 0$ (ווא משקל של המסלול הריב מ- s ל- s).

- **הנחה (אינדוקציה):** נניח כי הנטלה נכונה לך $i-1$ קורקוזים (ראשונים שנכנסו ל- S).

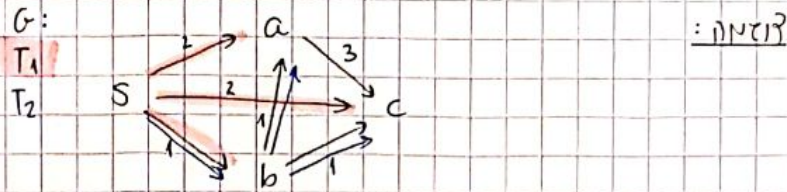
- **לזר האינדוקציה:** יהי v הקורקוז ה- i שנכנס ל- S .
נסיט קמטונה הריב לזר לפני ש- v נכנס ל- S .
(סמן P - מסלול קל ביותר מ- s ל- v).



$$\begin{aligned}
 & \cdot d(u) = \delta(s, u) \\
 & \cdot \delta(s, u) = w(P_{su}) \\
 & \cdot \delta(s, v) = w(P) = \\
 & = w(P_{su}) + w(u, v) \\
 & = d(u) + w(u, v) \geq d(v)
 \end{aligned}$$

נסמן $P(x, y)$ בלע ראשונה P (המקיימת) $x \in S, y \notin S$. נסמן P_1 את הריב של P מ- s ל- x . נסמן P_2 את הריב של P מ- x ל- y .

הערה: מסלולים קנים קיור SM לכל הקדקדקים V קט הינו
 על מושג קט T קו המסלול היחיד SM ו/ קט הינו
 מסלול קט קיור SM ו/ קט.



נניח למימור על ייצוג המימון של קט:

$T_2:$

null	b	s	b
s	a	b	c

π

למסלול קט קיור קט ו/.

לעקב אג (סלול) Relax(u,v,w)

Relax(u,v,w)
 if $d(v) > d(u) + w(u,v)$
 $d(v) \leftarrow d(u) + w(u,v)$
 $\pi(v) \leftarrow u$

משפט - (הערה קטנה) (האנדרגס) (הערה):
 אם האנדרגס (הערה) קט, אז (הערה)
 $T = (V, \{\pi(v), v\} \mid v \in V, v \neq s\})$
 (הערה) קט קיור SM של קט.

טענה (הערה): נסמן
 $V' = \{v \in V \mid d(v) = \delta(s, v)\}$
 $E' = \{\pi(v), v\} \mid v \in V', v \neq s\}$
 קט, נקרא קט, האנדרגס, האנדרגס (הערה) $T' = (V', E')$ (הערה)
 על מסלולים קנים קיור SM קט ו/ קט.

הוכחה (הערה): הוכחנו כי קט (הערה) קט (הערה) קט (הערה) $d(v) = \delta(s, v)$ $v \in V$
 אם $V' = V$ והמשפט נקבע ישירות מהטענה (הערה).

טענה: יהי $v \in V$ קדקדק שקיבל את הקט
 $d(u) = \delta(s, u)$ ו/ $d(v) = \delta(s, v)$ ו/ Relax(u,v,w) ו/ קט.

הוכחה:

$$d(u) + w(u,v) = d(v) = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u,v)$$

\uparrow
 (קט) קט

\Rightarrow

$$d(u) \leq \delta(s, u)$$

$$d(u) \geq \delta(s, u) \quad \text{מחסי אחרון}$$

$\blacksquare \quad d(u) = \delta(s, u) \quad \leftarrow$

הוכחה שגור, נשמרה: קצין צוקציה על V'

- קס: $|V'| = 1$

$V' = \{s\}$

$E' = \emptyset$

הטענה (כיוון) עבור V' .

- 3: נניח כי $|V'| = i$ ויהי v הקורקור הקא שמקבל

לכך $d(v) = \delta(s, v)$

השערה קה המקבל לכך מה קוצקה על $(\pi(v), v)$

אפי טענה, נוקט כי $d(\pi(v)) = \delta(s, \pi(v))$

אכן, $\pi(v) \in V'$

כל, יש להוכיח כי הצדק $\{v, \pi(v)\} \in E'$ ו- $\{v, \pi(v)\} \in V'$

וואו על מאלוים קליס קילגר מל עבור $\{v, \pi(v)\}$.

יש להוכיח:

1. T כל מושג קס
2. קד קיי מאלוים יחיד מל v במשקל $\delta(s, v)$

הוכחה 1: תוספנו (V', E') קשה יחידה $(\pi(v), v)$

המקיימ $\pi(v) \in V'$ ו- $v \notin V'$.

כדורי קהלה (תנסה) היחידה מל וכל מאלוים מל

כיוון מל $\pi(v) \in V'$ אפי הו קד קיי מאלוים יחיד מל $\pi(v)$ ונסמו $P_{s, \pi(v)}$ מל

הוכחה 2: כאין כי $P_{s, v}$ מאלוים יחיד קד מל v

$$w(P_{s, v}) = w(P_{s, \pi(v)}) + w(\pi(v), v) =$$

מל: $P_{s, \pi(v)}$ וואו מאלוים קל קילגר מל $\pi(v)$

$$= \delta(s, \pi(v)) + w(\pi(v), v) = \delta(s, v)$$

מל כי כדק קוצקה מל Relax (לגינה) מל

הרצאה 12

האלגוריתם של בלמן - פורד

גרסה: $G=(V,E)$, $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in V$

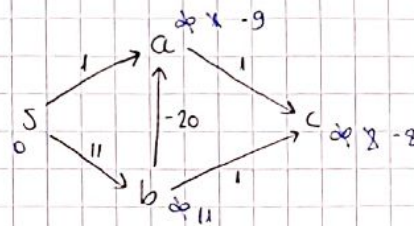
1. - איתחול: $d(s)=0$, $d(v)=\infty$ $v \in V$

2. - $i=1, \dots, |V|-1$ $\forall (u,v) \in E$ Relax(u,v,w)

3. - בדיקת קיום מנעם שלילי: $(u,v) \in E$ $d(v) > d(u) + w(u,v)$?
אם כן, חזור והחל "קיום מנעם שלילי קשה".

4. - סימון וחסר את d

הצגה:



לעבור על וקטוריות בסדר (הכאן):

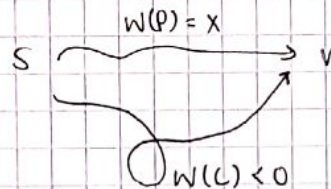
$\rightarrow (a,c), (b,c), (s,a), (b,a), (s,b)$

	איתחול	1 הצג	2 הצג	3 הצג
s	0	0	0	0
a	∞	1	-9	-9
b	∞	11	11	11
c	∞	∞	2	-8

↑
פוסט

הצגה: קיים מסלול קצר ביותר מ- s ל- v רק אם אין קיים מסלול שלילי.
אם כן, המסלול "מנעם שלילי".

הוסבר:



מנעם, נקודות קצרות - פורד (BF):

1. תחת הנחות שבו מנעמים שליליים קשה, נוכח כי קסום הריכוז, $d(v) = \delta(s,v)$ $\forall v \in V$
2. קיים מנעם שלילי רק אם BF חוזר במעגל 3 ומחזיק על קיום מנעם שלילי קשה.

הוכחה מעגל 1:

טענה: יהי P מסלול מ s ל t בעל א צלעות. כוסימו האיטרציה
 הוא בעל 2 יתקיים: $d(v) \leq w(P)$

מדוע הטענה עצמה אלוכית את מעגל 1?

אבחנה: תחת ההנחה שאין מעגלים בעלי v וכל $v \in V$ קיים מסלול
 קל יותר שחיון פשוט.

נוסח: נניח כי P מסלול קל יותר מ s ל t קט. אל מעגל C
 ק P יתקיים $w(C) \geq 0$.
 מכיוון ש P קל יותר, לא יגבן $w(C) > 0$ $\Leftrightarrow w(C) = 0$.
 לכן, C הולך (מעגלים) P , נתן אוקול מסלול פשוט P'
 בעל אותו משקל.

\Leftarrow תחת ההנחה כי אין מעגלים בעלי v , נוכח מהאקדמה כי לכל $v \in V$
 קיים מסלול קל יותר P מ s ל t שהינו פשוט.
 לכן $|P| = k \leq |V| - 1$
 לפי טענה, קסיד האיטרציה $k-1$ יתקיים $d(s, v) = w(P) \leq d(v)$.
 מטעם חסר תחת $d(v) \geq d(s, v)$ $\Leftarrow d(v) = d(s, v)$ בסיום
 (האיטרציה הא).
 מטעם חסר תחת, (u, v) לא ירד יתר קוואטר חריצה ולכן כוסימו
 (יצר האלמנטריות) יתקיים $d(v) = d(s, v)$.

הוכחת הטענה:

באינדוקציה על k .

- קסס: $k=0$: S הוא הקולקור (היחז לקורו קיים מסלול (רק)
 P מאורך 0. משמע $w(P)=0$. ואכן, קסיד האיטרציה ה-0
 לפי האקדמה $d(s) = 0 \leq w(P)$.

- הונחת האינדוקציה: נניח אז (כוונת הטענה לקור $k-1$ ונוכח לקור k .

- צלצ האינדוקציה: יהי P_{sv} מסלול באורך k מ s ל v .
 נסמן $P_{sv} = (s, \dots, u, v)$. נסמן קוויטא על P_{sv}
 של המסלול מ s ל u .
 $|P_{su}| = k-1$ ולכן לפי ה-1, קסיד האיטרציה ה- $k-1$
 יתקיים $d(u) \leq w(P_{su})$ (*)
 נקט באיטרציה ה- k בעצמה $Relax(u, v, w)$. קסיד
 העצמה יתקיים: $d(v) \leq d(u) + w(u, v)$.
 לכן קסיד העצמה יתקיים:
 $d(v) \leq d(u) + w(u, v) \leq w(P_{su}) + w(u, v) = w(P_{sv})$
 קיבלנו כי $d(v) \leq w(P_{sv})$.
 אז שיון זה לא ילגנה במהלך שור האיטרציה שכן $d(v)$
 יכול רק לרד, ולכן קסיד האיטרציה (הטענה) יתקיים. ■

\Rightarrow נניח כי קיים מסלול $C = \langle v_1, \dots, v_k = v_1 \rangle$ שגודלו קטן מ-3.
 נניח קניינה שהאנזאזים לא יהיו מסתלשלים קטן מ-3.
 כלומר, ההנאי הנקודות והקיים אל קטן קטן.
 נכנס, אקטור, הנושא מקיים: אל $2 \leq i \leq k$ מקיים

$$d(v_i) \leq d(v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i)$$
 (סכום את $d(v_i)$ אל)

$$\sum_{i=2}^k d(v_i) \leq \sum_{i=2}^k d(v_{i-1}) + \sum_{i=2}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

 מתקף המעלה
 שווים כי $v_k = v_1$
 ולכן $d(v_k) = d(v_1)$
 נסמן קו x

הנקודות כי $x \leq x + w(C) \leftarrow w(C) \geq 0$ סתירה!

\Rightarrow נניח כי האנזאזים נכנס קטן מ-3 והנאי אל קיים מעלה שווה.
 אל קיים קטן (u, v) כמורה $d(v) > d(u) + w(u, v)$
 נניח קניינה כי אין מסלולים שגודלם קטן מ-3.
 אזי מסתלשם ג קטן כזה אל $v \in u$ מקיים $d(v) = d(u) + w(u, v)$
 געגית חסר תחתון לא נניח לשכר אל סדר $d(u)$ כמורה.
 כיוון שהאנזאזים יהיו שגור $d(v)$ יכול להיות, הנוחה
 קניינה אינה נכונה וקיים מעלה שווה קטן ג.

נניח שגודל ריבוי:

- אחר: $O(|V|)$
 - ישן $|V|$ אוטוריזר, קטן אחת $O(|E|)$ (מחזורי)
 \leftarrow סקור: $O(|V| \cdot |E|)$

אלגוריתם מסלולים קצרים ביותר בין כל הנזאזים APSP

כל עגיון עסקנו במחזורי יחיד. נניח עתה לסדר את קצרים מסלולים קצרים ביותר בין כל הנזאזים.

מוסל: $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, $u = (v, e)$

יש למצוא: אל (u, v) או $d(u, v)$.

(למנוחה ואינטיים):

1. מ ממשקטור או שגיליים, נניח גיקסטרור מכל קורקור.
 מן ריבוי: $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$
2. מ ממשקטור שגיליים, נניח BF מכל קורקור.
 מן ריבוי: $O(|V|^2 |E|)$

FLOYD-WARSHALL

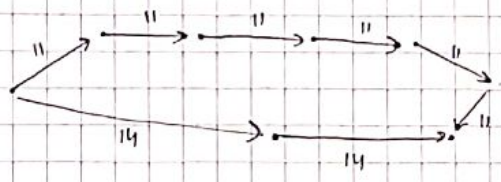
אנליזה מרחבית: $O(V^3)$
 זמן ריצה: $O(V^3)$

JOHNSON

לדיון: נרצה להזכיר פונקציה \hat{w} אשר
 משימה מסוימת תמיד קיימת.
 P מסלול קל ביותר מתחיל u ל v $\Rightarrow P$ מסלול קל ביותר מתחיל u ל v .
 למה נזכר, להזכיר ציקלס מסלול קל ביותר.

אך נראה שזה?

נרצה פונקציה \hat{w} אשר לכל מסלול P מתחיל u ל v מוסיפה קבוע.
 כל המסלולים מתחילים u ל v מוסיפים קבוע.



(אנליזה):

שלב 1: נוסף קווקור חזק S ונחבר אותו על קווקור 0
 אל קווקורים קטנים.
 (מסלול קטן, w את החזק / פונקציה מסלול קטנים).

שלב 2: נרצה BF על w ו- u על מסלול S .
 - BF מזהה צורה מחדש נוסף, נזכור ונסים.
 - אותיות, (מסלול קטן) $f(u)$ את $\delta(u, v)$ על $v \in V$.

שלב 3: נזכיר פונקציה מסלול \hat{w} על u :
 $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + f(u) - f(v)$
 (נרצה ציקלס מסלול קל ביותר).

שלב 4: **טענה 1:** לכל מסלול P מתחיל u ל v מתקיים:
 $\hat{w}(P) = w(P) + f(u) - f(v)$

$P = (u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$ (הוכחה):

$$\hat{w}(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{w}(v_i, v_{i+1}) = \hat{w}(v_0, v_1) + \dots + \hat{w}(v_{k-1}, v_k) =$$

$$= w(v_0, v_1) + f(v_0) - f(v_1) + w(v_1, v_2) + f(v_1) - f(v_2) + \dots + w(v_{k-1}, v_k) + f(v_{k-1}) - f(v_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} w(v_{i-1}, v_i) + f(u) - f(v) = w(P) + f(u) - f(v) \quad \blacksquare$$

$$\hat{w}(u,v) \geq 0 \quad (u,v) \in E \quad \text{כל} \quad \text{שמות} \quad \text{ל} \quad 2$$

הוכחה: $f(v) = \delta'(s,v) < \infty$ ומכאן $v \in V$ כל $v \in V$
 לכל תכונות משקלים קיים קיטור, מאחר ו- (u,v) קטל קטל,
 מתקיים:

$$\delta'(s,v) \leq \delta'(s,u) + w(u,v)$$

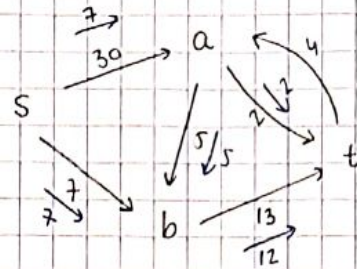
$$\underset{f(v)}{\parallel} \quad \underset{f(u)}{\parallel}$$

$$\rightarrow 0 \leq w(u,v) + f(u) - f(v) = \hat{w}(u,v)$$

הרצאה 13

הרצאה

* מושג / קטגוריה
* צרימה אלגורית -
* פתרון אלגורית



מוטיוציה:

- ציונות מים
- רשת חשמל
- אינטרנט
- כבישים
- שימושי הרבה יותר קלות (וספת)

$$N = (G = (V, E), C, s, t)$$

(הצורה): רשת צרימה היא רשת
כאשר:

- $G = (V, E)$ - רשת מכוון
- $C: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ - פונקציה קיבולת
- $C(u, v) = 0$ - מקיים
- s - קוץ מקור
- t - קוץ יעד (סוף)

(הצורה): צרימה היא פונקציה $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (ומקיים 3 דרישות):

1. איזוץ קיבול: $u, v \in V$ מקיים $f(u, v) \leq C(u, v)$
2. אנטי סימטריה: $u, v \in V$ מקיים $f(u, v) = -f(v, u)$
3. שימור צרימה: $u \in V \setminus \{s, t\}$ מקיים $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

ננסה לחקור את זה אומר שבסך הכל הצרימה החיובית והשלילית
שזה בסך הכל הצרימה החיובית הכוללת
זה שווה לאפס (היין חוצים אדרוס זה)

$$\begin{bmatrix} \text{סכום הצרימה} \\ \text{החיובית הכוללת} \\ u-v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{סכום הצרימה} \\ \text{החיובית הכוללת} \\ u-v \end{bmatrix}$$

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} f(v, u)$$

$f(u, v) > 0$ $f(v, u) > 0$

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} f(v, u)$$

$f(u, v) > 0$ $f(v, u) < 0$

$$\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) = 0$$

$f(u, v) > 0$ $f(v, u) < 0$

$$\sum_{\substack{u,v \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u,v) + \sum_{\substack{u,v \in V \\ f(u,v) < 0}} f(u,v) = 0$$

$$\sum_{u,v \in V} f(u,v) = 0$$

נבדוק את האילוץ האחרון של הוויכוח :

$$\begin{aligned} f(s,a) &= 7 \leq 30 \\ f(a,s) &= -7 \leq 0 \\ f(s,t) &= 0 = f(t,s) \leq 0 \\ f(a,t) &= 2 \leq 2 \\ f(t,a) &= -2 \leq 4 \\ f(a,b) &= 5 \leq 5 \\ f(b,a) &= -5 \leq 0 \end{aligned}$$

נבדוק אילוץ שימור צפיפות ב b :

$$f(b,s) + f(b,a) + f(b,t) = (-7) + (-5) + 12 = 0$$

הערה: מאנטיסימטריות מתקיים $\sum_{u,v \in V} f(u,v) = - \sum_{u,v \in V} f(v,u)$
ולכן את אילוץ 3 ניתן לכתוב כך:

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = 0 \quad \forall u \in V \setminus \{s,t\}$$

• צפיפות חובת כניסה אחת \Leftrightarrow צפיפות נשלית כניסה השני

• צפיפות מוגבלת בין כל שני קודקודים קטנה. אם אין צפיפות בין 2 קודקודים (למשל 0), אז ניתן שלא לציין את צפיפותם.

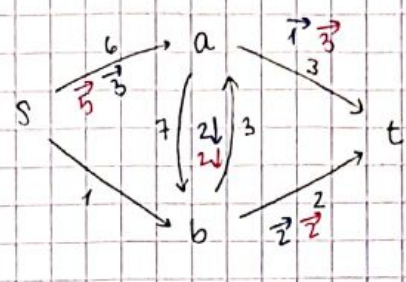
אסטרטגיה: אם $(u,v) \in E$ אז $f(u,v) = f(v,u) = 0$ או $(v,u) \in E$
הוכחה: מאילוץ קימות:
 $f(v,u) \leq c(v,u) = 0$
 $f(u,v) \leq c(u,v) = 0$
מאנטיסימטריות: $0 \geq f(u,v) - f(v,u) \geq 0$
לכן $f(u,v) = f(v,u) = 0$

הערה: בהינתן רשת צפיפות N ופונקציה A צפיפות, קובץ הצפיפות $|f|$ מוגדר על ידי $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$

הערה: כתיבת נאור, שמתקיים $|f| = \sum_{v \in V} f(v,t)$

קצת צמיח מקסימום:

- קלט: רשת צמיח $N = (G=(V,E), C, S, t)$
- פתרון חוקי: צמיח $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (החוקיות את 3 הרישוי)
- יש מקסימום: צמיח f שזורה מקסימלית.



קריטריון:

- רשת צמיח
- צמיח אפשרית
- קצוץ 3
- צמיח אפשרית
- מקסימלית (קצוץ 5)

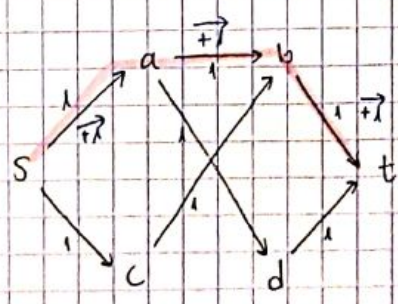
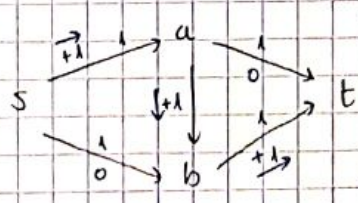
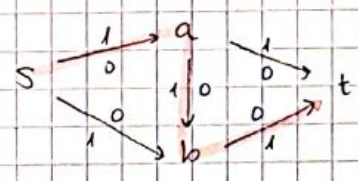
רעיון: כשל מקסימום צמיח מקסימום פ"א אפשרית חזק:

השורה: כותבים רשת צמיח $N = (G=(V,E), C, S, t)$ (שונות צמיח)
 f מסלול לא חייב מסלול קצוץ $S = V_0, V_1, \dots, V_k = t$
 כך שכל $i: (V_i, V_{i+1}) \in E$ ו- $f(V_i, V_{i+1}) < C(V_i, V_{i+1})$

אפשרות כשל:

- רשת מצויינת $f(u,v) = 0$ כל $u,v \in V$
 - כל חזק קיים מסלול לא חייב קצוץ:
 - מציא מסלול לא חייב P ותכנס בו כמה שיותר. כומר, כל $(u,v) \in P$ כך:
- $$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + \min_{e \in P} \{C(e) - f(e)\}$$
- $$f(v,u) \leftarrow -f(u,v)$$

קריטריון: רשת האפשרות לא מוכא צמיח מקסימום:



כל קריטריון:

הצגה: כתיבת רשת זרימה N ופונקציה f . מסלול שיטור P (הוא סדרת של קווקזים $S = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t$ כך שלכל i מתקיים: $0 < \Delta_i = C(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1})$)

הערות: (שים לב: סדרת הקווקזים הנו וא קהרמ מזהה מסלול בארץ G , למחר, יתכן אף לקטע i כך ש- $(v_i, v_{i+1}) \notin E$ או $(v_{i+1}, v_i) \in E$ או $(v_i, v_{i+1}) \in E$ או שניהם).

למה? כי אחרי ראיוע ש $\Delta = f(v_i, v_{i+1}) - C(v_i, v_{i+1})$ אז $\Delta_i = 0$ וכל

אויטואויו:

1. עבור i כך ש- $(v_i, v_{i+1}) \in E$ האויטואויו כחור: $\Delta_i = 0$ יקופל הצלע שחור כמו שצורם כחור.

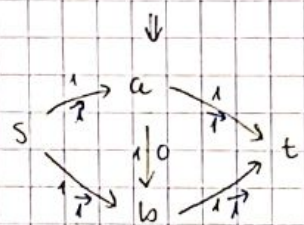
2. עבור i כך ש- $(v_i, v_{i+1}) \notin E$ וקפל ש- $C(v_i, v_{i+1}) = 0$ וכל $\Delta_i = 0 - f(v_i, v_{i+1}) = f(v_{i+1}, v_i)$ כלומר, כמו שאני יכול להפוך כיוון חצה שזה כמה שאני יכול לחתום (או לקטע) מתכנייה כיוון (הצד).



הצגה: נראה רשת זרימה:

אחרי

מסלול שיטור קאטרכה I
מסלול שיטור קאטרכה II



אלגוריתם Ford-Fulkerson

- נחל מציטה $f(u, v) = 0$ כל u, v
- כל קווקזים מסלול שיטור קצף:
- מצא מסלול שיטור $P = (S = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t)$
- חשב $\Delta = \min_{0 \leq i \leq \ell-1} \Delta_i$

כל $0 \leq i \leq \ell-1$: $f(v_i, v_{i+1}) \leftarrow f(v_i, v_{i+1}) + \Delta$
 $f(v_{i+1}, v_i) \leftarrow -f(v_i, v_{i+1})$

הרצאה 14

צרימה - המשך

$N(G=(V,E), c, s, t)$ - רשת צרימה

- צרימה מקסימלית: - אילוצי קיבול
- אנטרופי-סימטריות
- שיטת צרימה

$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$ - זרימה נצפית

מאטריס שיטת - קהיתן רשת צרימה N ופונקציה צרימה f , מאטריס שיטת
(ראו סדרת קולקציות $S = v_0, v_1, \dots, v_n = t$ כך שכל i
מאקיים: $0 < \Delta_i = (v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1})$

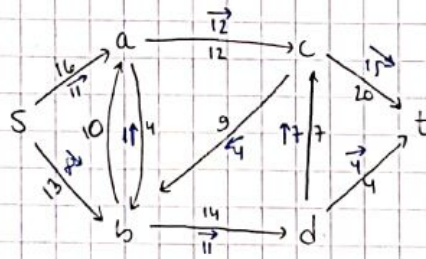
מאטריסות FF - המשך

הצורה: קהיתן רשת צרימה $N=(G, c, s, t)$ וצרימה חוקית $G=(V, E)$

f , נציג את רשת הצרימה (השינוי) N_f
 $N_f = (G_f = (V, E_f), c_f, s, t)$ כאשר:

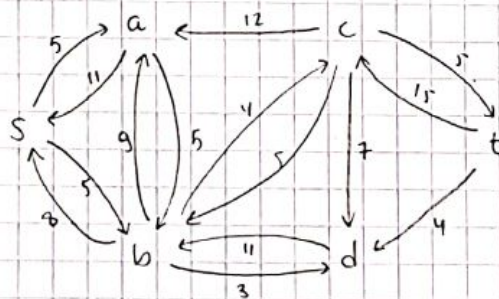
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$$



הצורה:

רשת הצרימה הנושית תהיה:



גאומטריה

כאן נרצה למצוא מסלול ולהחזירו, ולשם כך, נבצע את הצרימה.

הצורה:

- הרשת הנושית היא קצומה רשת צרימה
- אם צדד קולקציות $v \in V, u \in V$ מאקיים $c_f(u, v) > 0$
- בגישת השינוי, יכולה להיות גם צדד שלא קיימת כיוון
- $(u, v) \in E_f$ או $(v, u) \in E_f \Leftrightarrow (u, v) \in E$ או $(v, u) \in E$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|E_f|}{|E|} \leq 2$$

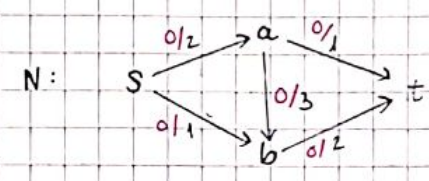
א

ניסוח שאלת רגל אחרת FF

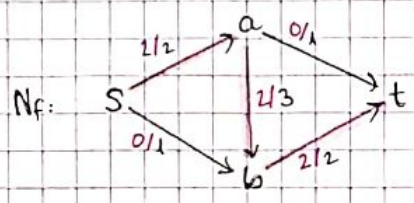
- 1. החל מצביות $f=0$
- 2. קנה את קנה השויות Nf
- 3. אם אין מסלול st ב- Nf , נחזור ונחזר את f
- 4. אחרת, מצינו מסלול בעזרת P .
 $C_f(P) = \min_{(u,v) \in P} \{C_f(u,v)\}$
- 5. הסגנו: $f(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + C_f(P) & , (u,v) \in P \\ f(u,v) - C_f(P) & , (v,w) \in P \\ f(u,v) & , \text{אחרת} \end{cases}$

דוגמה רגל:

התחלה: נתחיל מרגל צביעה N לא צביעה 0

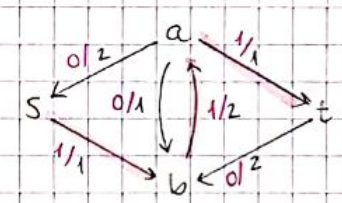


נקנה רגל שויות קאטרכות 1:



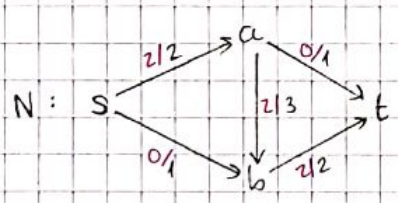
Nf P מסלול st ב- Nf קאטרכות 1

נקנה רגל שויות קאטרכות 2:

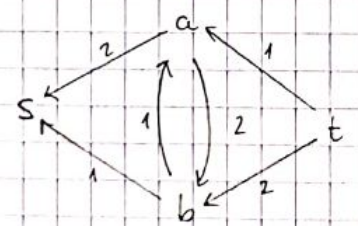


Nf P מסלול st ב- Nf קאטרכות 2

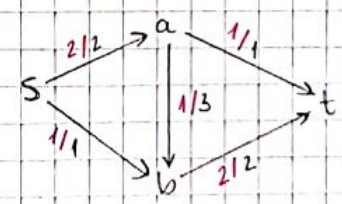
נלכין את הצביעות ב- N :



נקנה רגל שויות קאטרכות 3:



נלכין את הצביעות ב- N :



אין מסלול st נלכין נלכין ונחזיר את הצביעות שיש או ב-3 בה

דברים שנוסח ונאמר האלמנטים:

- נראה שכל שלב, הצדקה, f שהאלמנטים מתפזר חזקתם (באנליזה)
- נראה שכל האלמנטים שלב, אך קיבלנו צדקה מקסימלית
- נראה שכל שלב, הקיבולים שלבים אף האלמנטים שלב
- נראה שכל שלב.

טענה 1: תהי N רשת סימון, f פונקציה צדקה חזקה N f'

פונקציה צדקה חזקה N f' $g = f + f'$ $g(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$ u, v g f f' $g = f + f'$

הוכחה: g חזקה N $g = f + f'$

ראשית, נראה כי g חזקה N :

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) = \\ &= -f(v, u) - f'(v, u) = \\ &= -(f(v, u) + f'(v, u)) = \\ &= -g(v, u) \end{aligned}$$

- סימון צדקה: עבור $u \neq v$:

$$\sum_{v \in V} g(u, v) = \underbrace{\sum_{v \in V} f(u, v)}_{\text{סימון צדקה } 0 = f(u, u)} + \underbrace{\sum_{v \in V} f'(u, v)}_{\text{סימון צדקה } 0 = f'(u, u)} = 0$$

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \leq \\ &\leq f(u, v) + c(u, v) = \\ &= f(u, v) + [c(u, v) - f(u, v)] = \\ &= f(u, v) + c(u, v) - f(u, v) = c(u, v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(u, v) \leq c(u, v)$$

לכן, g חזקה N .

כל נראה כי $|g| = |f| + |f'|$

$$|g| = \sum_{v \in V} g(s, v) = \sum_{v \in V} f(s, v) + \sum_{v \in V} f'(s, v) = |f| + |f'|$$

- **מסקנה, טענה חשובה:** כל שלב של אלמנטים FF , f צדקה חזקה.
- כל שלב, הצדקה של CCP

סלילון של חוקי התכונה:

באנציקלופדיה על מספר האינטריות שהאזורים מקבלים:

פסים: $f=0$ צמיחה חלופית.

3/3: האנציקלופדיה: נניח כי f צמיחה חלופית.

$$f'(u,v) = \begin{cases} C_f(p) & , (u,v) \in p \\ -C_f(p) & , (v,u) \in p \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

f צמיחה חלופית כרגע השיעור N_f (צריך לקחת את 3 הצדדים). הצמיחה אחת הקבלה היא $g = f + f'$ (כאן f' הצמיחה הזאת היא N ושיטתה 1, g חוקית כרגע N ואז $|f| + |f'| = |f + f'|$)

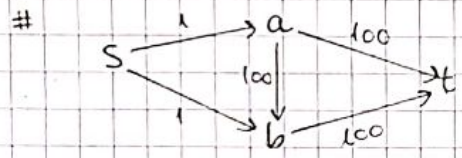
צמיחה יכולה להיות גם שלילית (הצמיחה הזאת היא N)

מכאן מתקבל כי f צמיחה חלופית f ו- f' (שארנו f צמיחה חלופית ואז הצמיחה מתחבר).

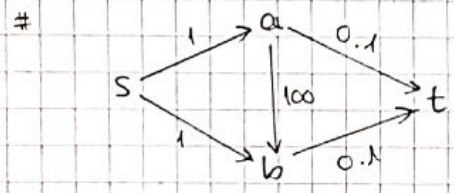
ש. איך מוכיחים ש-FF מוציא צמיחה מקסימלית אם כלל? ת. (כאן חסר עליין על שאלה כל צמיחה חלופית איננה (כאן שאר) FF כלל אנן מקבלים צמיחה שגויה שונה חסר העליין.

ש. איננה נשים את החסר הזה?

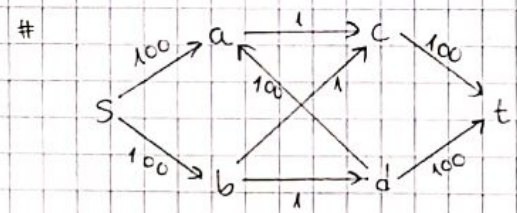
צמיחות וחסמים:



חסר עליין $= \sum_{v \in V} C(S, v)$



כאן, החסר (העליין) הוא $\sum_{v \in V} C(v, t)$



אפשר להעביר את היות 3 מ- t שם כשנחלק, אפשר להעביר רק 3.

(הצורה): חתך בסרגל הוא צבץ תקינות $\phi(S, T)$ ש $S \cup T = V$ ו- $S \cap T = \emptyset$ וקנוס $S \in S$ ו- $t \in T$.

ש חתך יגן חסר עליין על הצמיחה המקסימלית כרגע. נסתכל על הצמיחה כחות (S, T) מקבלים את הצמיחה של חתך = קיבול של חתך.

(הצורה): קיבול של חתך (S, T) : $C(S, t) = \sum_{\substack{u \in S, v \in T \\ (u,v) \in E}} C(u, v)$

הרצאה 15

החשך - ארבוריתם FF

הצורה: ציינו קתך (S, T)

$$f(S, T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u, v)$$

הצורה: קתך מינימום (S_0, T_0) הוא קתך, שכל קתך (S, T) מתקיים $C(S_0, T_0) \leq C(S, T)$

למה 3: אם קתך (S, T) וכל ציינו חוקי f מתקיים $f(S, T) = |f|$

למה 4: אם קתך (S, T) וכל ציינו חוקי f קורש N מתקיים $|f| \leq C(S, T)$

הוכחת תוכנות על FF

חצים והוכח כי אם FF קצור אז הוא מינימום ציינו מקסימלי קורש.

- הקתך מינימום קורש יהיה חסר קטין וכל ציינו אפשרית קצור.
- (ראה כי אם FF קצור, אז הוא מינימום חסר הדחף). (חסר חזק)

משפט Min-Cut-Max-flow

(קצור ציינו מקסימום = הקטן קתך מינימום).

תהי $N = (G = (V, E), C, s, t)$ רשת ציינו ו- f ציינו חוקית בה. אז הקטן מקסימום:

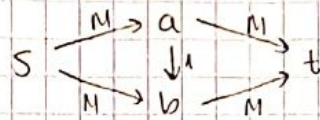
- f הוא ציינו מקסימום.
- ל- f קיים מסלול טכ- t קורש השווה $|f|$.
- קיים קתך (S, T) לקור $|f| = C(S, T)$

הוכחה: אם FF קצור, אז תנאי K מתקיים (כי כל תנאי לבדוק האפשרות). משקלית הנתונים, תנאי A מתקיים ו- f ציינו מקסימום.

הוכחת משפט: (ראו: $A \leq K, K \leq T, T \leq A$)

- $A \leq K$: גון כי f ציינו מקסימום קת. נניח קרעלה כי קיים מסלול טכ- t ק- N . כל חקירות ק- N חוקיים יתלכין צוואר הקקיות על טטול צו חזקי ממש. לכן, נניח להקצין את (ציינו f ולהקצין קטן זה. סתירה למקסימליות f .

קצוות:



ניתן לא FF עם מסלול השני של הקצא:
 $P_1 = \langle s, a, b, t \rangle$
 $P_2 = \langle s, b, a, t \rangle$
 $M \times M$ (מכונה).

$$|f_{max}| = 2M$$

ייתכן כי M אקספוננציאל קצוץ הקט, נרדמה $M = 2^{|V|+|E|}$

חברה: עבור קובוצות שאינן רציונליות, FF אינו קומפוט בוצר.
 יש צדקה בזה האנצוריהם לא בוצר ואפילו לא מחקים
 לצריכה מקסימום.

אנצוריהם למציאת עיגול מקסימום:

$$O(|f_{max}|(|V|+|E|)) \text{ FF} \quad \# \quad 1956$$

Edmonds-Karp - $O(|E|^2|V|)$ - צורה אנצוריהם FF
 באופן כזה שכל קוצים מסלול שיפור קצר יותר.
 קצטר BFS.
 ישנם $O(|V||E|)$ שלבים.

Dinitz - האנצוריהם על Dinitz קצטר FF על מסלול
 קצנים בולט אך משלים טכניקה ישנה אשר מקצרת את
 צמן הריצה $O(|E||V|^2)$

$$O(|V||E|) \quad \text{Orelim} \quad \# \quad 2013$$

אנצוריהם Dinitz

לאחר כונית חרשה השיורה, נמצא ונראה את כל המסלולים הקצרים
 קצטר ע"י שימוש בטכניקה ייחודית של חצוץ (= מציאת צריחה חוסמת
 קו)

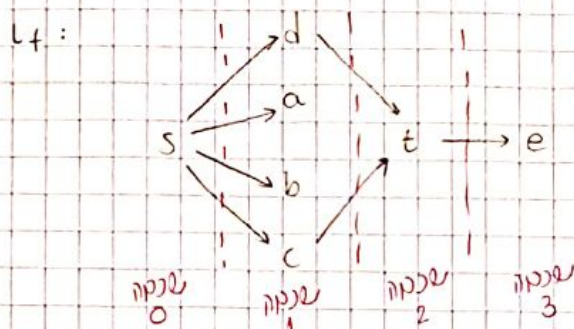
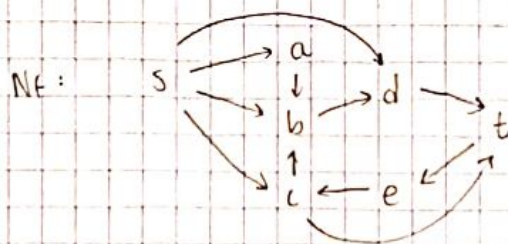
קטגוריה היות חרשה השיורה החצוץ חבל מסלול קצנים קצטר יצ
 ל- t אחריה ממש ממש קטגוריה הקוצים. (= מרחקו של t צל מנוע קכל
 שכל) וכן מספר השקפים היות $O(|V|)$
 נראה שכל שכל מזה $O(|V||E|)$.
 לכן סה"כ צמן ריצה $O(|V|^2|E|)$

האנצוריהם:

1. אחת: $f(u, v) = 0$ לכל $u, v \in V$.
2. כונית חרשה שיורה N_f .
3. כל קוצ קיים מסלול L_f קצטר N_f קצטר:
 - 3.1. כונית חרשה חרשה L_f על N_f
 - 3.2. מציא צריחה חוסמת L_f קצטר.
 - 3.3. סצכן $f \leftarrow f + g$
 - 3.4. כונית חרשה N_f מחדש
4. חצוץ את f .

החומר:	הנהגת נהיגה	Lt	של	Nt	הוא	הנהגת נהיגה	אחר
	(הנהגת נהיגה)	הנהגת נהיגה	הנהגת נהיגה	הנהגת נהיגה	הנהגת נהיגה	הנהגת נהיגה	הנהגת נהיגה

1371



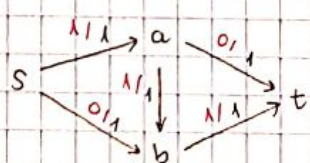
$LF = (V_L, E_L)$ (V_L, E_L) (V_L, E_L)

$$V_L = \bigcup_{i=0}^{|V|-1} V_i, \quad V_i = \{v \in V \mid d(v) = i\} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{imprimis} \\ d(v) = \text{GCS}(v) \end{matrix}$$

$$E_L = \bigcup_{i=1}^{|V|-1} E_i, \quad E_i = \{(u, v) \in E_F \mid u \in V_{i-1}, v \in V_i\} \quad \leftarrow$$

ה'שנ"א
ה'שנ"ב

הערה: f היא פונקציה מ $P \times Q$ ל R .
 $P = \{u, v\}$ $Q = \{x, y\}$ $R = \{z\}$
 $f(u, x) = z$ $f(v, y) = z$



צנימה חוסמת \neq צנימה קטנה

ש. כיצד נבנה ציור תוספת?

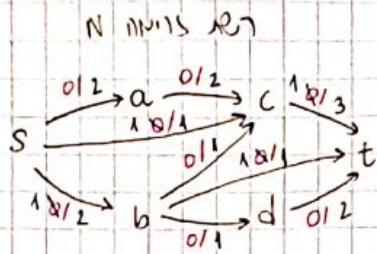
ת	ראינו אנאוריתם חמץ המוצא צהרון חוסה	
	קפץ שם, מחנך מנחם מ-5 שטיון רוי ויוסיף את שך	
	צאור הנקבות של המסוף אכחיה אורכו	

צאן ריזה :

$$O(|V| + |E|) \quad \text{Sifon na 3n} -$$

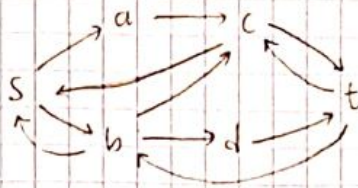
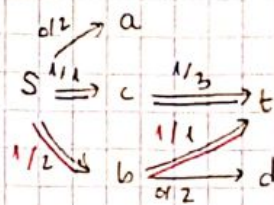
- קבל מסלול כזה, אפיונות קשה יותר, נעשה רווח לאחר תכרית
 והשינוי. כן, יש זה היות $|E|$ מסלול 38 בעל נקטות רווח.
 \hookleftarrow סתם גיון קיצה לרבייה חסומה $G(|E|^2) = G(|E|(|V| + |E|))$

אנשטערטע פאר דינען מוזאיק צייטן חוסטא כוונת עקווא און אינע יאנה
מזלען. (און אנטווערפן) מוזאיק צייטן חוסטא דינען עס מוזאיקע צייטן
(CIVIL)



Network flow diagram (Middle):

Network flow diagram (Right):

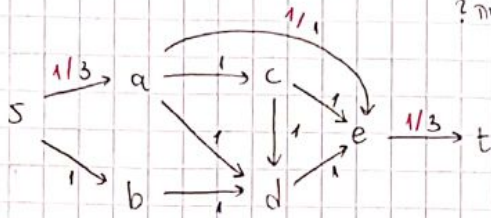


הרצאה 16

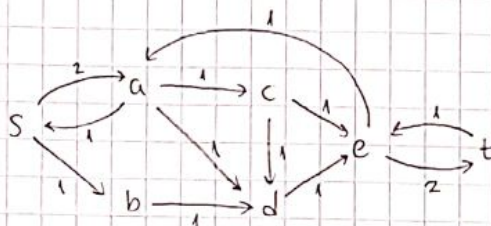
אורי שטוד

תעודות:

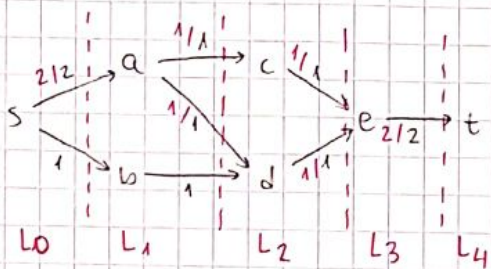
- קבל שלם באמצעות קיוצ, f הוא צרימה חוקית.
- אם האמצעים קצב או הוא מתפזר צרימה מקסימלית.
- היום נראה שר כמה זמן האמצעים קוצר?
- כמה איטרציות יג? ?
- מזה זמן הריצה של כל איטרציה?



קוצמה: \approx רגל צרימה N
 \approx צרימה נוכחית f



\approx רגל שיווי N

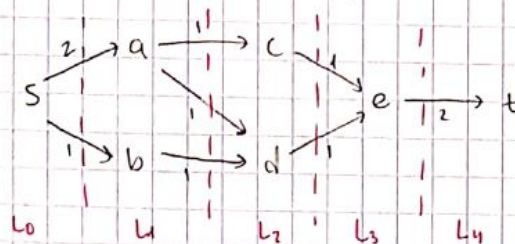


\approx רגל שכנות L
 \approx צרימה חסומת f

ש. כמה איטרציות \approx באמצעות קיוצ?

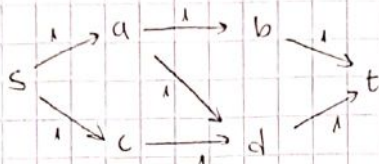
ת. נראה שהיו וכל היתר וזו איטרציות
 (האטרסציה: נראה שכולם שלם, t מתרחק מ- s כנגד הערכות
 (כאשר, מעביר אנשם העשם L_i של ניוצאיות
 עזרה), ולכן אחר וזו איטרציות t מוגעת
 S .

סימון: $u \in V$ מסמן כי $L_t(u)$ יית הערכה של u ב- L_t .

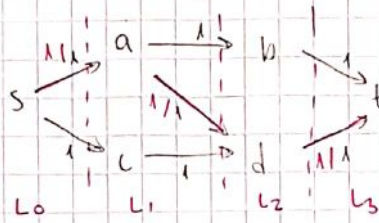


קוצמה:

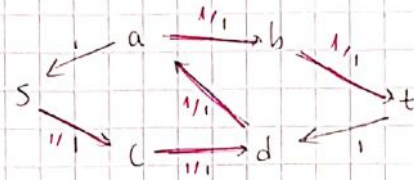
$$\begin{aligned}
 L_f(s) &= 0 \\
 L_f(a) &= L_f(b) = 1 \\
 L_f(t) &= 4
 \end{aligned}$$



צפייה: נניח ש N_f היא:



גשר הענפים L_f היא:



קשרים N_f תראה כי:

P מסלול

מסלול P הוא קבוצת קשרים P שבה $P = (s = v_0, v_1, \dots, v_{k+1} = t)$ (תצפית: שתי מסלולים P ו- Q שונים $P \neq Q$ לא יכלו להיות N_f קשרים).
 - (v_j, v_{j+1}) קשר ב- P .
 - (v_j, v_{j+1}) מופיעה ב- N_f , אם ורק אם אחרת L_f :

$$L_f(v_{j+1}) \leq L_f(v_j) + 1$$

 - v_j המרחק של v_j מ- s ב- N_f .
 - v_{j+1} המרחק של v_{j+1} מ- s ב- N_f .

- אם (v_j, v_{j+1}) לא מופיעה ב- N_f , אם (v_{j+1}, v_j) מופיעה ב- N_f ורק אז $L_f(v_{j+1}) = L_f(v_j) + 1$.
 - אם אחרת $L_f(v_j) = L_f(v_{j+1}) + 1$.

כלומר, תמיד $L_f(v_{j+1}) \leq L_f(v_j) + 1$ ורק אם (v_j, v_{j+1}) מופיעה ב- N_f אז $L_f(v_{j+1}) = L_f(v_j) + 1$.

נסתכל על הסדרה $(L_f(v_0), L_f(v_1), \dots, L_f(v_{k+1}))$:
 $L_f(s) = 0$ $L_f(t) = k$

בסדרה הזו, קיין 2 איברים שונים, כלומר $k \geq 2$.
 וקיים מרחק k בין s ל- t .

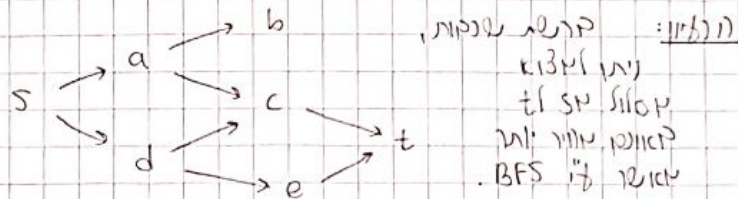
צפייה: $0, 1, 2, 3, 2, 3, 4$
 אכן, מכיוון שהסדרה מתחילה ב-0 ונגמרת ב-4, מספר האיברים יהיה חסר אי-אחד $k+3$ ולכן אורכו של P הוא $k+2$.
 כלומר, (במרחק 2) מתקיים $k+2 \geq k+1$.
 מסתנה: ישנם $|V|$ קשרים ב- N_f .

ש. כמה זמן נדרש למצוא את הדרך הקצרה?

- ת. • קניית רשת שנקראת מסלול קצר $O(|V| + |E|)$ קצרה BFS.
 • אך מציאת דרכים חוסות?

(סימן 1)
 אפשר למצוא דרכים חוסות ל" צד נכנס של (מציאת מסלול קצר) BFS נדרש קודם כיוון שישנו וכן לעומת קצרה אחת (היות חוסות).
 $O(|E|^2 + |E||V|)$ וכן קשה BFS על רשת חוסות.
 מסלול מציאת דרכים חוסות.

(כמה אור ניק למצוא דרכים חוסות קצרה הענקות קצרה בליח אור:



נחלק מ- t ונרד אחורה לז שנקראת s-p.

האליגוריתם

- קלט: רשת ענקות $L_f = (G_f = (V, E), C_f, s, t)$

- אחריות: $F \subseteq E_L, g = 0$

(הקטנה קרנה הענקות L_f)

- 333: $\text{in-degree}(t) > 0$ אז כן:

1. מחילוק מ- t ומחילוק אחורה קצרה (V, F) $t \leftarrow s$ P מסלול מ- s ל- t
2. $C_g(P) = \min_{e \in P} \{C_f(e) - g(e)\}$

3. כל זמן: $g(u, v) \leftarrow g(u, v) + C_g(P)$ אם $(u, v) \in P$
 $g(v, u) \leftarrow g(v, u) - C_g(P)$

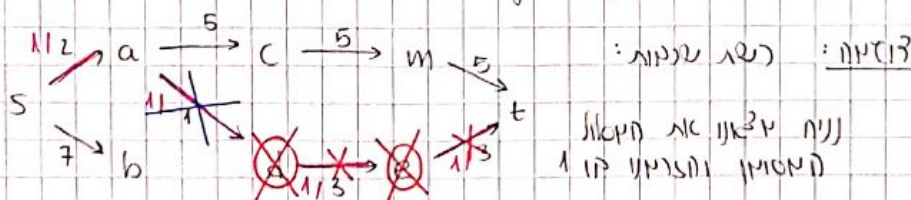
4. אם $(u, v) \in P$ אז $C(u, v) = g(u, v)$ א. $F \leftarrow F \setminus \{(u, v)\}$
 ב. $\text{cleanForward}(v)$ אם $\text{indegree}(v) = 0$

(נשתדל לזרז) $\text{cleanForward}(v)$:

א. אם $(v, w) \in F$ אז $\text{cleanForward}(w)$

ב. $F \leftarrow F \setminus \{(v, w)\}$

אם $\text{indegree}(w) = 0$ אז $\text{cleanForward}(w)$



333: רשת שנקראת:

ניתן למצוא את מסלול המסלול והזמן קודם

מחלקים קטנה רשת
 קוצרים על צדג נכנס = 0 - אנו מחליים

מסלול: האלגוריתם מוצא כוונה חסומה

נניח שיש ריצה:

- מציאת מסלול אורכי שיש $O(V^2)$ כי המסלול נשטף.
- יהיו $O(E)$ מסלולים כי בכל פעם שנמצא מסלול, נחזיק אותו.

נניח שיש מסלול עם אורך כל הפסגות ה Cleanforward קטן:

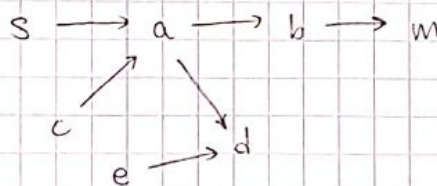
מסלול ב נדמה וואו, הקריאות החזרוניות חזרו (מסלול קטן) $O(V)$

סה"כ, מחיר כל פסגה ה Cleanforward הוא $O(E)$

סה"כ, שיש ריצה מציאת ציטוט חוקה $O(E \cdot V + E)$ Cleanforward

הערה:

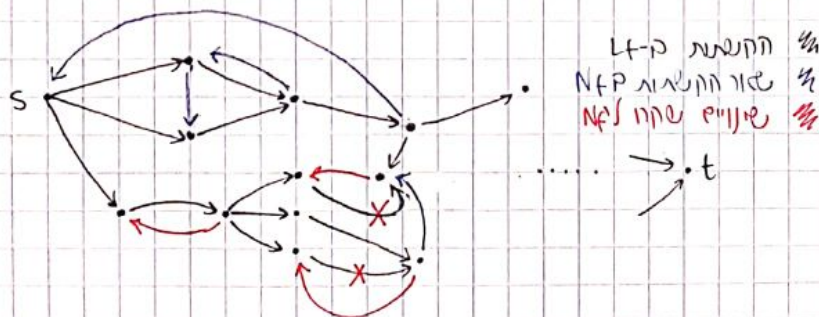
1. אלגוריתם מציאת הציטוט החסומה מוצא כל רשת חסומה מוגדרת
2. ייתכן שהמסלול הנמצא אינו אופטימלי במחירה הריצה, ולכן נבדוק אחרת את הריצה מה Cleanforward



מה מוכתר? אלגוריתם דיוניל כסוף הוא $O(E \cdot V^2)$

אנטיסימטריות (הוכחה) את מנסה לעקוב היתרון של t שזל ממש:

נניח קטע ה- k , היתרון של t מ- s הוא L ונניח שהרשת (השורה) N נרשם הערכות L (קטן):



ש. מה עשוי להשתנות בין הרשת השנייה הזאת לבין זאת שאחרת N ?

ת. אנו מוכיחים ציטוט רק אורך מסלולים קטנים הערכות (נלמד קטע) בחזרה ולכן עשויים רק להוסיף קטע אחד (קטן) ולשנות את המרחק קטע חזרה (שנין לחזרה)

ש. מה קורה למרחק של t מ- S ?

ת. הוכחנו קודם אמורה לא יכולה להקטין מרחקים.
 \leftarrow כרגע הנינו Nf מן האנשים הרבים של S ו- t .
 בנוסף, אין ב- Nf אנשים של t קצרות ל.
 מה?
 אם יש אנשים ב- Nf אז הוא נמצא על L (כלומר, אנשים
 שמור ב- Nf) ולכן הרחוקים ממנו ב- L אחר קטנים ולכן
 המסלול לא יופיל ב- Nf .

הרצאה 17

תכנון ליניארי

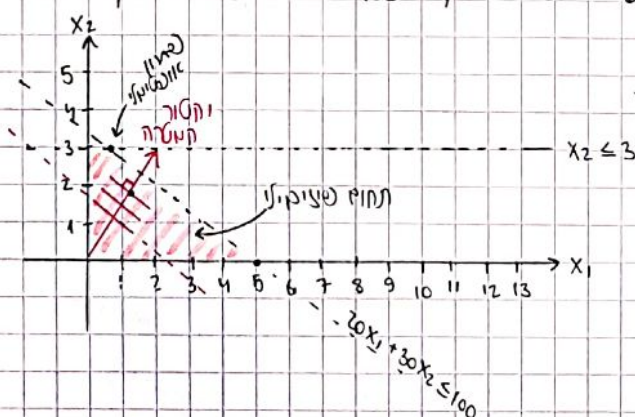
- רוב האלגוריתמים בראיון על הציגו לסימן קהלית קבוצות. למטר, לופטון הוא מקור קבוצ
- לדוגמה: MST, קלינג האנק וכו'...
- צרימה, נקטת הינה קלינג קטגוריות וצוים.
- תכנון ליניארי זה הוא פותר קלינג קטגוריות וצוים.

דוגמה: נגד מקבל על חלק טייה 28 סוזי מוצרים: חלק דול ושיקו.

- מחיר: ליטר חלק דול - 10 ש"ח
ליטר שיקו - 20 ש"ח
- אינצ' 1: לא נגד ליטר יתר מ-3 ליטר שיקו קטנה
- חלק דול צריך 20 ש"ח סוכר וליטר
- שיקו צריך 30 ש"ח סוכר וליטר.
- אינצ' 2: נגד לקבל לכל היותר 100 ש"ח סוכר בשלח.
- מטרה: מקטת חוז ביטוח.

- מציג את הקלינג קטגוריות מוגנים:
- x_1 : כמות חלק דול (המיוצר קטנה) (ליטר)
 - x_2 : כמות שיקו (המיוצר קטנה) (ליטר)

תחת הציג הדג, אנו מחפשים למטר את הקלינג $\max \{10x_1 + 20x_2\}$
פ"ש - $x_2 \leq 3$, $20x_1 + 30x_2 \leq 100$, $x_1, x_2 \geq 0$

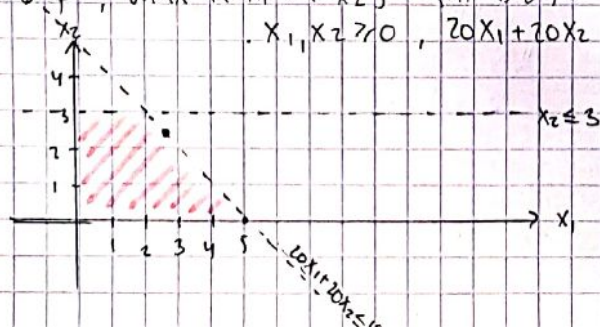


כעיון אופטימלי (יחיד) מומקט לבידור $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$

מסקנה: אם באשר על נגדו הקלה חס קטגוריות, פערון אופטימלי עשוי להכיל ערכים שלמים.

כלי נגד מומקט מוריד את כמות הסוכר קטגוריות 20 ש"ח ליטר. לכן הוא צ"ח מוגד אותו קטגוריות מחר על חלק דול - 10 ש"ח.

הקלינג עליו עתה הוא $\max \{10x_1 + 10x_2\}$ $x_2 \leq 3$, $20x_1 + 20x_2 \leq 100$, $x_1, x_2 \geq 0$



- שני המשתנים מוגדרים את אותו רווח, ולכן (ראוה שיון סגור)
 איננו אחת יחדיו מוגדרת.
 נקרא לבעיה אופטימלית $x_1 = x_2 = 2.5$

- ניתן לראות הנסך, "רצוי" את הנסך לטובה וימין או למטה ושמאלה
 נקרא לבעיה אופטימלית קטנה: $x_1 = 5, x_2 = 0$, $x_1 = 2, x_2 = 3$.

תצורה: מערכת משוואות ליניאריות היא מהצורה $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ לכל $i = 1, \dots, m$.
 ראוי להבהיר כי ניתן לשפר את הסדרה קטן
 פולינומי בערך קטן יותר.

הצורה: תוכנית ליניארית היא בעיה אופטימלית על משתנים ממשיים.

מטרה: למצוא אופטימום של פונקציה ליניארית קטנה, עבור כל
 השמה למשתנים שמקיימת אוסף של אי שוויונים ליניאריים.

נתון: אוסף נתונים (מספרים ממשיים)
 $(a_{ij} \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$
 $(b_i \mid i=1, \dots, m)$
 $(c_j \mid j=1, \dots, n)$

תוכנית ליניארית מקסימיזציה (מינימיזציה)

לבעיה חוקי הוא השמה למשתנים x_1, \dots, x_n שמתקיימים
 (אילווצים):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

לבעיה אופטימלית (היא לבעיה חוקי) פחות (המקסימום)
 משיגה לך ערך (קטן) ביותר.

הערות:
 - המשתנים הם משתנים ממשיים
 - המין איננו סגור
 - המשתנים אינם חייבים להיות ≥ 0
 - בעיה מקסימיזציה היא בעיה ליניארית עם קטן (המינימום)
 - אופטימיזציה עם \geq
 - אם משתנה לא מוגדר, המקסימום $= 0$.

אלגוריתם לבעיה ליניארית

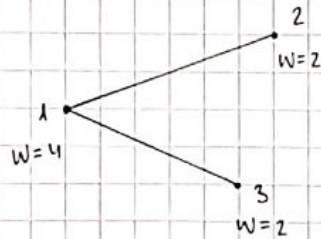
- **קריטריון:** אלגוריתם סימפלקס (לא פולינומי)
 קטנה (כאן) בעיה חוקי של כל חסם הקטנים.
 קטן ופחות (הקטן).

- **תוצאה:** אלגוריתם (אופטימלית) (פולינומי)
 (אופטימלית) מוצא לבעיה אופטימלית קטן (פולינומי) קטן חסם.

קצ"מ כיוון זמנים ממוזגים קצ"מ-ר-ר

מונח: קצ"מ-ר-ר $G=(U,V,E)$ ופונקציה ממשקל $w:U \cup V \rightarrow \mathbb{R}^+$
 פונקציה: כיוון זמנים, פונקציה, קצ"מ $S \subseteq U \cup V$ כך שכל קצה
 $(u,v) \in E$ מתקיים $u \in S$ או $v \in S$.
 יש לזכור: כיוון זמנים S ממשקל $w(S) = \sum_{u \in S} w(u)$ קטן ביותר.

$U = \{1\}$
 $V = \{2,3\}$
 $E = \{(1,2), (1,3)\}$
 $w(1) = 4$
 $w(2) = w(3) = 2$



קצ"מ:

- כיוון זמנים ממוזגים:
 $S = \{1\}, w(S) = 4$
 $S = \{2,3\}, w(S) = 2+2 = 4$

סיון 1: ננסה למצוא את הקצ"מ הקטן ביותר.

שלב א': נניח שיש לנו משתני אינדיקטור x_1, x_2, x_3
 כאשר $x_i = 1$ אם i כיוון זמנים S או 0 אחרת.
 תחת ההנחה הנ"ל, ניתן למצוא את ממשקל הכיוון
 קצ"מ $4x_1 + 2x_2 + 2x_3$
 איך נאלץ את הקצ"מ $(1,2)$ להיות מבוטא?
 נרצה שכל קצה יהיה מבוטא x_1, x_2 יקבל את הערך 1.
 $x_1 + x_2 \geq 1$
 קצ"מ אלו, אנו, עבור הקצ"מ $(1,3)$: $x_1 + x_3 \geq 1$

שלב ב': נחשש את ההנחה ונניח למעשה שיש
 ניתן לבטא אינדיקטור כפי "הכרח" את x_i להיות
 0 או 1 קצ"מ קטן: $x_1 \geq 0, x_1 \leq 1$

קצ"מ: קצ"מ ממוזגות יותר אי שוויון מסוג \geq
 (נרשם): $-x_1 \geq -1$

עבור הקצ"מ הנ"ל נכתוב תכנית ממשקל על משתנים שלמים:

תכנית A: $\min \sum_{u \in U \cup V} w(u) x_u$

- כך ש:
- (1) $x_u + x_v \geq 1 \quad \forall (u,v) \in E$
 - (2) $x_u \geq 0 \quad \forall u \in U \cup V$
 - (3) $-x_u \geq -1 \quad \forall u \in U \cup V$
 - (4) $x_u \in \mathbb{Z} \quad \forall u \in U \cup V$

אבחנה 1: וקטור $(\hat{x}_u), u \in U \cup V$ מקיים את תאולוגיות (3)-(5) אם ורק אם הוא וקטור שלם $\{0,1\}$.

סימון: עבור וקטור $(\hat{x}_u), u \in U \cup V$ ממשקל $\{0,1\}$, קצ"מ הזמנים
 (ומאפשרת) \hat{S} הוקטור הוא $\hat{S}(\hat{x}) = \{u \in U \cup V \mid \hat{x}_u = 1\}$

אבחנה 2: לכל וקטור $(\hat{x}_u), u \in U \cup V$ ממשקל $\{0,1\}$ מתקיים כי ממשקל
 (וקצ"מ) $\hat{S}(\hat{x})$ הוא קצ"מ סדר פונקציה המיטת
 $\sum_{u \in U \cup V} w(u) x_u$

וגם: $u \in U \cup V$, (\hat{x}_u) מה $\{0,1\}$ מקיים את אישוש
 $z \Leftrightarrow S(\hat{x})$ (הא כיסוי קבוצתי של G).

נסמן P -OPT את חבר הסתיון האופטימלי של תוכנית A . כל
 P -OPT הוא נוסף כיסוי מינימלי P -צד G .

הערה: תוכנית A אינה תוכנית בינארית

הרצאה 18

תכנון ליניארי - הסבר

תכנית A

$$\min \sum_{u \in U \cup V} w(u) X_u \quad \text{such that:} \quad (1)$$

$$X_u + X_v \geq 1 \quad (2)$$

$$X_u \geq 0 \quad \forall u \in U \cup V \quad (3)$$

$$-X_u \geq -1 \quad \forall u \in U \cup V \quad (4)$$

$$X_u \in \mathbb{Z} \quad \forall u \in U \cup V \quad (5)$$

OPT - ערך פתרון אופטימלי של תכנית A.

תכנית B

$$\min \sum_{u \in U \cup V} w(u) Z_u \quad \text{such that:} \quad (6)$$

$$Z_u + Z_v \geq 1 \quad (7)$$

$$Z_u \geq 0 \quad \forall u \in U \cup V \quad (8)$$

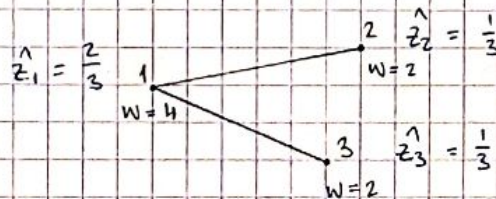
$$-Z_u \geq -1 \quad \forall u \in U \cup V \quad (9)$$

FRAC - ערך פתרון אופטימלי של תכנית B.

- (איון): OPT הוא משהו מסוים מינימלי בשביל G.
- תכנית A אינה תכנית ליניארית, כשל אלוף (5).
 - תכנית B היתה תכנית ליניארית, אך אינה מייצגת את כל המינימום.

מסקנה: אל מופשט $G = (U, V, E)$ לבעיה של תכנון ליניארי. $OPT = FRAC$.

נניח לחשב את OPT בעזרת פולינום.



פתרון חוקי לתכנית B: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
אך לא ייתכן כזה פתרון מינימלי.

$$\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 4 \quad \text{ערך פונקציה מינימלית}$$

אופטימליות

$$FRAC \leq OPT$$

טענה 1:

טענה 2:

היה אלוזיה אחרת שיתקבל פתרון (Z_u^*) , $u \in U \cup V$ של תכנית B ומכאן נקטור ערכים אוקראינים (X_u^*) , $u \in U \cup V$ כך ש:

- הערכים (X_u^*) פתרון חוקי לתכנית A.
- כעת, האלמנטים המיוצגים של 0 או 1 למעשה.
- תחילה משהו והכינוי מקריטטי $E[\sum_{u \in U \cup V} w(u) X_u^*] = \sum_{u \in U \cup V} w(u) Z_u^*$

הוכחת נכונות:

לא נניח שגודל u מסתכן להוכיח כי $OPT \leq \text{FRAC}$.
 יהי $(\hat{z}_u)_{u \in U \cup V}$ פתרון אופטימלי לתוכנית ב. אז הערך של FRAC הוא
 (נניח) את גודל z של הפתרון (\hat{z}_u) (נקרא וקטור
 משתנים מקדים $(\hat{x}_u)_{u \in U \cup V}$.
 כיון קטלוגי, מחלקת הוא ממוצע ממוצע וכן קיימת השיטה
 (סבבנישית וטו אקראית!) כלומר (\hat{x}_u) פתרון המקסימלי
 יקראו להסתברות חיוניות כי שיתקדם:

$$OPT \leq \sum_{u \in U \cup V} w(u) \hat{x}_u \leq E \left[\sum_{u \in U \cup V} w(u) \hat{x}_u^* \right] = \sum_{u \in U \cup V} w(u) \hat{z}_u = \text{FRAC}$$

↑
 קנוס, (\hat{x}_u) הוא פתרון חוקי לתוכנית A וקטור לדנו \leq לדרך
 פתרון אופטימלי.
 $OPT \leq \text{FRAC} \leftarrow$

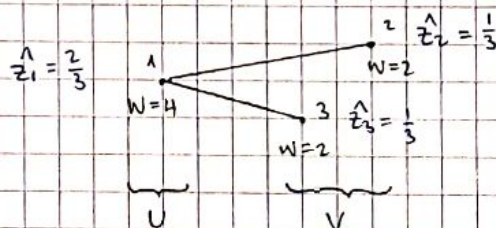
■ $OPT = \text{FRAC}$ כמובן:

הוכחת גודל z של 1 :

יהי $(\hat{x}_u)_{u \in U \cup V}$ פתרון אופטימלי לתוכנית A. אז לדנו OPT .
 אם נבחר $\hat{z}_u = \hat{x}_u$ לכל $u \in U \cup V$, נקרא כי (\hat{z}_u)
 פתרון חוקי לתוכנית B, ולכן מתקיים:
 $\text{FRAC} \leq \sum_{u \in U \cup V} w(u) \hat{z}_u = \sum_{u \in U \cup V} w(u) \hat{x}_u = OPT$

הוכחת גודל z של 2 :

יהי $(\hat{z}_u)_{u \in U \cup V}$ פתרון חוקי לתוכנית B.
 נבנון קאטגוריה וקטור $r \in [0, 1]$
 נגדל קאטגוריה אחת מספר ממשית $r \in [0, 1]$
 אם $u \in U$ $x_u^* \leftarrow \begin{cases} 1 & , r \leq \hat{z}_u \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$
 אם $v \in V$ $x_v^* \leftarrow \begin{cases} 1 & , r \geq 1 - \hat{z}_v \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$



דוגמה:

ערך r	הסתברות	המשתנה x^*	ערך התועלת
$0 \leq r < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$(1, 0, 0)$	4
$r = \frac{2}{3}$	0	$(1, 1, 1)$	8
$\frac{2}{3} < r \leq 1$	$\frac{1}{3}$	$(0, 1, 1)$	4

$\frac{2}{3} \cdot 4 + 0 \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 4$ מוחלף לדרך הפתרון:

משפט אינדוקציה (התחלה) - תוכחה:

יש אלו שמשקלים x_1, \dots, x_n ופרמטרים:

$$E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \sum_{i=1}^n E[x_i]$$

קיום האילונוס:

אם קצרה האילונוס, (ולא מפורש) העמוד של 0 או 1 ורק אילונוס

(5)-(3) מרקמים, נוסח (2) את מילוי (2):

תנאי: $(u, v) \in E$: $x_u^* + x_v^* \geq 1$

עו שוקל נק בשמות 1 מקום x_u^*, x_v^* מקבל את הדרך 1.

קודם $u \in U$ ו $v \in V$

נניח בשניהם כי קיים (הערה של r אשר נניח 2) והמשפט

לרבים 0. $\hat{x}_u < r < 1 - \hat{x}_v$ $\Leftrightarrow \hat{x}_u + \hat{x}_v < 1$

אם והתחלנו משהו של חניה ב, ולק אפי אילונו (7) מקיים $\hat{x}_u + \hat{x}_v \geq 1$ בסתירה.

תחלת ערך השמור:

(שמשט במשפט אינדוקציה התחלה) עבור $u \in U \cup V$ (x_u^*)

טענה: אם $u \in U \cup V$ מקיים: $E[x_u^*] = \hat{x}_u$

$$E\left[\sum_{u \in U \cup V} w(u) x_u^*\right] = \sum_{u \in U \cup V} E[w(u) x_u^*] = \sum_{u \in U \cup V} w(u) E[x_u^*] = \sum_{u \in U \cup V} w(u) \hat{x}_u$$

↓ אינדוקציה
↓ $w(u)$ קבוע
↓ טענה

הוכחת הטענה:

- ית' $u \in U$: $x_u^* = 1$ אם $r \in [0, \hat{x}_u]$ וסר קורה בסתירה $0-1$ אחרת.

$$E[x_u] = Pr[x_u^* = 1] \cdot 1 + Pr[x_u^* = 0] \cdot 0 = \hat{x}_u$$

- ית' $v \in V$: $x_v^* = 1$ אם $r \in [1 - \hat{x}_v, 1]$ וסר קורה בסתירה $0-1$ אחרת.

$$E[x_v^*] = Pr[x_v^* = 1] \cdot 1 + Pr[x_v^* = 0] \cdot 0 = \hat{x}_v$$

דוגמיות שני תוכנות בינאריות:

שני הדוגמיות המופיעות:

- חלק ראשון: 10 ש"ח

- שני: 20 ש"ח

נניח לייצר 15 חילוקי 3 וסר שוקו.

- חלק ראשון: 20 ש"ח סוג א' וסר

- שני: 20 ש"ח סוג א' וסר

נניח לעצור 15 חילוקי 30 ש"ח סוג א' וסר.

x_1 - כמות חלב רגולר
 x_2 - כמות חלב שקדים

max $10x_1 + 20x_2$ Such that:

$$x_2 \leq 3$$

$$20x_1 + 50x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

נניח שהמטרה היא למצוא את המקסימום של
 $x_1 = 5, x_2 = 0$ ייתכן להשיג את המקסימום
 - היתרון של המטרה = 50

כיצד ניתן לדעת כי זהו הפתרון אופטימלי?

- מדובר בערך מקסימום של פונקציית מטרה (המטרה) בהתאם לנתונים
 (המטרה) זהו הערך המקסימום של הפונקציית מטרה (המטרה) בהתאם לנתונים

- המטרה המקסימלית היא: $x_1 = 5, x_2 = 0$
 - זהו המקסימום של הפונקציית מטרה (המטרה) בהתאם לנתונים

- המטרה המקסימלית היא: $x_1 = 5, x_2 = 0$
 - זהו המקסימום של הפונקציית מטרה (המטרה) בהתאם לנתונים

$$\underbrace{20y_2x_1}_{\geq 10} + \underbrace{(y_1 + 50y_2)x_2}_{\geq 20} \leq 3y_1 + 100y_2 = 50$$

$y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{2}$

משפט: דואליות חזקה - אם קיימים פתרונות חוקיים $(x_j)_{j=1}^n$ ו- $(y_i)_{i=1}^m$ המוכיחים את האי-שוויון:

$$\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i$$

הוכחה: $MAX \leq MIN$

הוכחה: יהיו $(\hat{x}_j)_{j=1}^n$ פתרונות חוקיים ו- $(\hat{y}_i)_{i=1}^m$ פתרון חוקי.

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \hat{y}_i \leq b_i \hat{y}_i \quad \text{כי } \hat{y}_i \geq 0$$

$$(2) \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{y}_i \hat{x}_j \geq c_j \hat{x}_j \quad \text{כאשר } \hat{x}_j \geq 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j &\stackrel{(2)}{\leq} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{y}_i \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \hat{y}_i \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i \end{aligned}$$

משפט: דואליות חזקה - אם 2 פתרונות חוקיים פנימיים (כלומר) $MAX = MIN$ אז מתקיים

הוכחה: תוכנית B

$$\min \sum_{u \in U \cup V} w(u) z_u$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} z_u + z_v &\geq 1 & \forall (u,v) \in E \\ z_u &\geq 0 & \forall u \in U \cup V \\ -z_u &\geq -1 & \forall u \in U \cup V \end{aligned}$$

משפט: אם $G = (U, V, E)$ ו- w פונקציית משקל, אז OPT הוא הערך המינימלי של תוכנית B והוא OPT .

(נסתדע כי הפתרון של התוכנית הוא אכן הפתרון האופטימלי).

תוכנית C

$$\min \sum_{u \in U \cup V} w(u) y_u \quad \text{כך ש: } \begin{aligned} y_u + y_v &\geq 1 & \text{אם } (u,v) \in E \\ y_u &\geq 0 & \text{אם } u \in U \cup V \end{aligned}$$

הוכחה: אם C הוא הפתרון האופטימלי של תוכנית B, אז OPT הוא הערך המינימלי של תוכנית C.

טענה: הערך האופטימלי של תוכנית B הוא אף היתר הערך האופטימלי של תוכנית C.

הוכחה: נ-2 המכונים יש (אולי ערך אופטימלי והוא מיתר) כיוון מינימלי עבור הערך $(G=(V,E), w)$

הוכחה חטונה:

יהי $u \in U$ (על) פתרון אופטימלי לתוכנית C. אז $u \leq 1$ לכל u .
נניח קבענו כי קיים u ש $u > 1$.
נצטרך פתרון חדש בו נוריד את ערך u להיות 1.
העטנו את ערך פונקציית המטרה. קונס, כל האילוצים של התוכנית C מתקיימים ולכן הפתרון חוקי, סתירה לכך שנתחנן על פתרון אופטימלי.
לכן (u) פתרון חוקי לתוכנית B וסיימנו.

תניית התוכנית הקואלית:

צוהי תוכנית מקסימיזציה. לתוכנית C, לכל העת $e \in E$ הערכנו אילוץ, ולכן קואלית, לכל העת $e \in E$ נצטרך משתנה x_e פונקציית המטרה תהיה:

$$\max \sum_{e \in E} 1 \cdot x_e = \sum_{e \in E} x_e$$

קונס, יהיו אילוץ סימון:
לכל $e \in E, x_e \geq 0$.

לכל $u \in U \cup V$ יש משתנה כמותיות) ולכן קראונו יהיה אילוץ "מאזן" עבור u :

$$\sum_{e \in E} ?? x_e \leq w(u) \quad \forall u \in U \cup V$$

	v_1	v_2	...	u_1	
e_1	1	0		1	0
e_2	0	1		0	1
e_3					
\vdots					
e_m					

x_{e_1}
 x_{e_2}
 x_{e_3}

 x_{e_m}

נמקד w :

$$1 \cdot x_{e_1} + 0 \cdot x_{e_2} + \dots =$$

$$= \sum_{\substack{e \in E: \\ u_1 \in e}} x_e$$

$$e_1 = (u_1, v_1)$$

$$1 \cdot u_1 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot \dots \leq 1$$

ש. מן המקומות קצת נמאלי?
ת. נקדם משתנה על. לכל אילוץ, ערך העת $e=(u,v)$ ש $e=u$ או $e=v$, המקום של על האילוצ הוא 1 וכל אילוצ אחר הוא 0.

לכן, $?? = 1$ אם e מכילה את הקצוץ u ו- $?? = 0$ אחרת.
אם e לא מכילה את הקצוץ u .

קבץ ז' : König Graph
 קבץ ז' : $G = (V, E)$, $V = \{u, v, w\}$
 קבץ ז' : $E = \{(u, v), (u, w), (v, w)\}$

הרצאה 20

אליגוריתים מקראיים

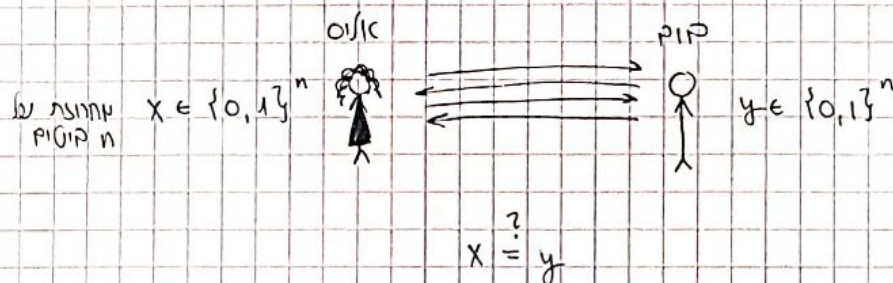
- על לבניו לסמן באזורימא צמיוניסטי
- כוונצאות וקריאות לסמן באזורימאס אקראיים.
- נשמע מהטעם מטיעון קרי אקראי החלטות

צרישה:

- באזורימא צמיוניסטי, אל קוט, האזורימא יתציר תשובה נכונה תמיד.
- באזורימא אקראי, אל קוט, האזורימא יתציר תשובה נכונה כולסתמאות אחוז.

מטרה: אזורימא יתן יותר.

קצית שיוון התחבוצות:



מטרה: פרוטוקול קו אלס שלמה הוצעה אחר כליז אקראי.
קוב מתחילת הכר $x=y$ ולזה אלס

מקצ יעילות: נרצה שיהיה נסחור קיטוס יכיר קרע בין אלס אקראי.

תוצרה: קיים פרוטוקול מקצ סיבוכיות וחשיבות על אלס וקוב (עליו ציור פרוטוקול)

פרוטוקול טחולאלי: (צמיוניסטי)

- אלס שלמה או x אקראי
- קוב משוח ויתחציר וגס אלס.

על תהפוכות:

- שלמה x - n קיטוס
- תשובה - 1 קיטוס
- סקת: $O(n)$ קיטוס.

סענה: כל פרוטוקול צמיוניסטי אכילה אלס חייבת לשלח ולסחור n קיטוס.

עליו התחבוח:

נוי שאליס שלמה $1-n$ קיטוס. אע יע 2^n קיטוס שוק $1-2^n$ הוצעות שונות שאליס יכולה לשלח. לכן קיימים 2 קיטוס שונים x ו $2x$ עקור אלס שלמה או אורת הוצעה (לשו שוכר הויניס).

נוי כי קוב יתחבר את הוצעה הצי והוא יתחציר $x=y$ וכלג הוא לא יוצע באופן חז יעשוקי את התשובה כי (והוצעה מלאויות x ו $2x$).

ש. מה אף אולי תגלה את הקיט (ה-16 והקט"ז-128?
 ת. ניתן להפיל את האלגוריתם.
 יש קטעים לזיהוי שטח גמיר.

סיומולוגיה אחרת: קטן סימולוגיה תחשבה $\log(n)$

אלגוריתם לזן טקסטים ט.פ. -
 אלוים: מציאה באורכא קומפלימנט אחרת $\{1, \dots, n\}$ ושלחה
 קיט $x[i]$
 קיט: קיט קיט $y[i] = x[i]$

סימולוגיה תחשבה:
 - אלוים שלחה אף $x[i]$ - קיט $1 \leq i \leq n$ - קיט $\log n$ קיט

ניתח האלגוריתם:
 $x = y$: קיט שיה קיט קיט i , לומר $x[i] = y[i]$ אף i
 והאלגוריתם בוקר גמיר.

$x \neq y$: יגדן וי שונה קיט קיט קיט. תחשבה וזהה אלו
 קיט $\frac{1}{n}$
 תחשבה וזהה קיט $\frac{1}{n} \leq$
 יש קטעים לזיהוי קיט $\frac{1}{n}$.

אלגוריתם Karp-Rabin (1987)

- אלוים x, y כמספרים $0 \leq x, y < 2^n$

- אלוים: מציאה באורכא קומפלימנט אחרת מספר ראשון $q < n^2$
 מתחשבה $z = x \bmod q$
 שלחה קיט אף z קיט $q-1$.

- קיט: יתעב $y \bmod q$ וישווה z קיט
 יתעב אלוים אף תחשבה.

סימולוגיה תחשבה:
 - אלוים שלחה קיט $n^2 > q, z$ וכן שלחה קיט $\log n$
 קיט $2 \log n$
 קיט $0(\log n)$ קיט 0

ניתח האלגוריתם:
 $x = y$: אף q $x \bmod q = y \bmod q$ וזהה אלוים
 $x \neq y$: אלוים אף q $x \bmod q = y \bmod q$ קיט
 $(x - y) \bmod q = 0$
 $0 \neq w = (x - y)$ יתעב אף q

$$w = 28$$

$$y = 53$$

$$x = 25$$

דוגמה:

רצ"ב

$$= \begin{cases} 1 \xleftarrow{x} \\ 1 \xleftarrow{y} \end{cases} \quad q=2 \quad \#$$

$$\neq \begin{cases} 1 \xleftarrow{x} \\ 2 \xleftarrow{y} \end{cases} \quad q=3 \quad \#$$

$$= \begin{cases} 4 \xleftarrow{x} \\ 4 \xleftarrow{y} \end{cases} \quad q=7 \quad \#$$

בעזרת ההצגה q "רצ"ב" נשתמש ב-2 לזיהוי מחזור המספרים:

1. יהי $w < 2^n \ni w$. מספר הראשוניים השונים שמתחלקים את w (ללא שארית) $n > n$.

2. לכל t , מספר הראשוניים שמתחלקים ב- t הוא אסוף $\frac{t}{\log t}$ (ללא חוסר).

הוכחה 1:

יהיו q_1, \dots, q_ℓ האנשים הראשוניים השונים של w .
 $1 \leq \ell$
 q_i מתחלק את w ולכן $q_i \leq w$ והפך שלום מתחלק את w .
 קובעו: $q_1 \dots q_\ell \leq w$
 לכל q_i מתקיים $q_i \geq 2$ ולכן $2^\ell \leq q_1 \dots q_\ell \leq w < 2^n$
 $\ell < n$ ←

משפט: אם $x \neq y$ אזם מרחק q שמתחלק את x ו- y קטן מ- $\frac{3}{4}$.

הוכחה: האלמנטים (כלל) אם אולם מרחק ראשוני q ש- w .

$$(x-y) \bmod q = 0$$

$$(0 \leq w < 2^n \text{ ולכן } 0 \leq x, y < 2^n)$$

$$\boxed{n^2 > \text{מרחק הראשוניים}} \quad \text{ראשוניים "רצ"ב" מתחלקים את } w$$

$$\begin{aligned} \text{אם } \ell < n/2, \text{ אז } \ell < n/2 \text{ והקבוצה הראשונה} & \quad n > n/2 \\ \text{אם } \ell < n/2, \text{ אז } \ell < n/2 \text{ והקבוצה השנייה} & \quad n^2 / \log n^2 \leq n \end{aligned}$$

אם $\ell < n/2$, מספר ה- q -ים השונים שמתחלקים את w (ללא שארית) $n/2$.

אם $\ell < n/2$, מספר הראשוניים שאינם קוחרת מוגדל הוא אסוף $n^2 / \log n^2$.

$$\begin{aligned} \Pr \left[\begin{array}{c} \text{אולם מרחק ראשוני } q \leq n^2 \\ 0 \neq w = (x-y) < n^2 \end{array} \right] &= \Pr \left[\begin{array}{c} \text{כעתל קיבוצו} \\ x \neq y \end{array} \right] \leq \frac{n}{n^2 / \log n^2} = \frac{2 \log n}{n} \leq \frac{1}{4} \\ &\leq \frac{\text{מספר הראשוניים המתחלקים את } w}{n} < \frac{n}{n^2 / \log n^2} > \frac{n^2}{\log n^2} \end{aligned}$$

עבור n גדול

ש. האם $\frac{3}{4}$ זה טוס משיק?
ת. לא. נראה ונעיר את המודלים

אנזורים משיק:

- נחזור על הפרטוקול א עליון.

- אנחנו מציגים באופן קב"ר ראשוניים q_1, \dots, q_k ושוחת
לפיכך את q_i ואת $q_i \bmod q_j = x$ לכל $1 \leq i \leq k$

- קוד משיק $z_i = y \bmod q_i$

אם כל ה- k השואאות. קוד היקל שמון, הוא יתעור "שום".
אחר (קוד i לקוח קוד שנים) ולכן יתעור "שנים".

ניתוח הסתברות:

אם $y \neq x$, אז כוח טובה אם מתעור "שום". כוח, קוד (נעל)
כל אחד מהמקורות.
(סמן A_i - הריבוי ה- i הסתייגה כינעלון).

$$Pr[\text{כינעלון}] = Pr[A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k] = \prod_{i=1}^k Pr[A_i] \leq \left(\frac{1}{q}\right)^k$$

↑
מאונסת
קב"ר

סימולטור תהיגור: $O(k \log n)$

רמזה: $k = 50$

הוספנו $\frac{1}{2^{100}} \geq$ ונעלון

ניתוח מן הריבוי:

- הוצגו ראשוני $t > n$: $O(\log^3 t)$ (ללא חוסה)
- חישוק טבור $x \bmod q$ איש $n = |x|$. $O(n)$ לוח סלולר
קסטח חילוק ארוך
(כל שלב מחסרים מהחלק היחסי של x באורך n את q . יט
ול חילוק n חסרים בלוח).

$$O(\log^3(n^2) + n) = O(n) \quad \leftarrow \text{סוף}$$

הרצאה 21

כלי התאמה והחזרה

משימה: נתון טקסט ארוך ויחידות קצרות. נרצה לזכור את כל היחידות של היחידות בטרקט.

String Matching

- קט: $T[1, \dots, m]$ - טקסט ארוך
 - תבנית קצרה: $P[1, \dots, n]$
 - נאמר על יחידה ק- T של חציה S אם
 $T_S \equiv T[S+1, S+2, \dots, S+n] = P[1, 2, \dots, n]$
 - פלט: כל החציות S כך ש $T_S = P$

דוגמה: $T = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$, $P = 0100$

המקור: $S = \{3, 6\}$

פתרון נאיבי: לכל $0 \leq S \leq m-n$ נשווה את T_S ואת P ונמסור את S כמקרה והתקיים שוויון.

ציון זמן: $O((m-n)n) = O(m \cdot n)$

טמח: אחרות אחרות בסיסיות $O(m+n)$

חסר תחתון אפקט: קשה לומר את הקט יש צורך ב- $m+n$ פעולות.

אלגוריתם Karp-Rabin (בעיית ההתאמה המהירה)

- נתונים T, P - רצף יציב על מחרוזת.

1. קטל ראשוני $q < m^2$ כחשבון אחרונה.
2. חשב $b = P \bmod q$
3. לכל $0 \leq S \leq m-n$ כיצד:
 א. חשב $a_S = T_S \bmod q$
 ב. אם $a_S = b$ הכנס את S לפלט.

ציון זמן:

1. $O(\log^3(m^2))$
 2. חישוב b - $O(n)$
 3. קיטוע נאיבי, חישוב כל a_S טלח $O(m)$ ולכן סה"כ: $O((m-n)n) = O(m^2)$
- במקרה, נראה אך לחשב את a_S ב-3 ק- $O(m+n)$

T	=	1	0	1	0	0
P	=	1	0	1		
q	=	3				

$$b = p \bmod a = 5 \bmod 3 = 2$$

$$\begin{aligned} a_0 &= T_0 \bmod q = 5 \bmod 3 = 2 & - & \text{opp} \\ a_1 &= T_1 \bmod q = 2 \bmod 3 = 2 & - & \text{opp} \\ a_2 &= T_2 \bmod q = 4 \bmod 3 = 1 & - & \text{opp} \end{aligned}$$

הסתרו: $S = \{0, 1\}$

ניתוח ההסתברות והצלחה:

משפט: אם קוט, האנזורים מחציר הקורב הצבות נכונה בהסתמות $\frac{3}{4} \leq$

$$\text{קוביות: } 0 \leq s \leq m-1 \quad \text{יהי } p = T_s \quad b = a_s, \quad q, \quad \text{כאשר } 0 \leq s \leq m-1$$

$p \nmid T_5$ פיר
 $p \mid T_5$ פיר
 $p \nmid T_5$ פיר

הערות: מקור זה נקרא false-positive. קידם ממנו שם זה נקרא S שלילי אמור להיותם אלוהים (כנים).

$T_S \neq P$ IP As $(T_S - P)$ $P[As]$

$$Pr[A_S] = Pr[T_S = p \mid \mu_C p / n \mu_C \text{ g. h.c. (n)} \mid T_S \neq p] =$$

$$= \frac{\hbar^2 m^2 \mu \text{ (קטן) } T_S - P \text{ אצל } q \text{ טמפרטורה } q \text{ מסלול האטומים}}{q < \hbar^2 m^2 \text{ מסלול האטומים}} \leq \frac{T_S - P \text{ אצל } q \text{ טמפרטורה } q \text{ מסלול האטומים}}{q < \hbar^2 m^2 \text{ מסלול האטומים}} \leq$$

מקרה 1, שם n ראשוניים $n^{2m^2}/\log(n^2m^2)$ וקיים את $Ts-p$.
מקרה 2, שם n ראשוניים n^{2m^2} וקיים $Ts-p$.

$$T_S, p < 2^n : |T_S| = |p| = n \quad \cup \quad \text{כיוון}$$

$$W_S = T_S - p < 2^n \quad \cap$$

$\frac{n^2 m^2}{\log(n^2 m^2)} < \begin{matrix} \text{הרצון} \\ q < m^2 n^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{הרצון} \\ \text{מחזורי} \\ T_S - P \end{matrix} < n$

$$\leq \frac{n}{\frac{n^2 m^2}{\log(n^2 m^2)}} = \frac{2 \log(nm)}{m^2 n}$$

- נתון נקודת קבלה S (האופטימלית):
 נשאל אם קיים $0 \leq S \leq m-n$ כך ש- $T_S + P$ יהיה
 המינימום של $(T_S - P)$.

$P_r[A \cup B] \leq P_r[A] + P_r[B]$ עבור A, B מאובחנים: **למה?**

$P_r[\text{שגיאה}] = P_r[T_S - P \text{ הוא המקסימום של } T_S + P \text{ עבור } 0 \leq S \leq m-n] =$

$$= P_r[A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{m-n}] \leq \sum_{s=0}^{m-n} P_r[A_s] \leq$$

\uparrow
מספר האירועים

$$\leq (m-n+1) \frac{2 \log(mn)}{m^2 n} \leq \frac{2 \log(mn)}{mn} \leq \frac{1}{4}$$

לפי ה- n מספר
 הצדדים המצוי

הוכחת השגיאה:

1. הצגת הטעות ממוצעת q

2. הצגת כל האירועים:

יהי A קבוצת כלשהי.

אם $i=1, \dots, k$ ניקח (באופן קבוע) את האירועים

ונקרא קבוצת S_i .

נחזיר את $S = \bigcap_{i=1}^k S_i$

\leftarrow האירועים שבהם A קיים S קיים q $T_S + P$ הוא המקסימום, $s \in S$

במקרה $s \in S_i$ אם i .

כלומר, ממוצע של q נשען
 (הסתברות לנישון) לכל A $\frac{1}{4} > \frac{1}{4}$.

באופן פורמלי: תהי A קבוצת הנבדלה כלשהי. קבוצת מופע X , (מיון)
 $A(X)$ את הממוצע (המיון).

הצגות: קבוצת שיוויון (המחזוריות): $A(X, Y) = \text{"כן"} \Leftrightarrow X = Y$.

הצגות: האירועים אורבני M פתור את קבוצת A של G "חצי מיון"

("צו מיון") P או מתקיים:

- אם מופע X קיים q $A(X) = \text{"כן"} =$ מתקיים:

$$P_r[M(X) = \text{"כן"}] = 1 - p$$

- אם מופע X קיים q $A(X) = \text{"לא"} =$ מתקיים:

$$P_r[M(X) = \text{"לא"}] \geq 1 - p$$

הערה: באירועים של G "צו מיון" נדרוש $0 < p < \frac{1}{2}$.

ש. תהי A קבוצת מיון M אירועים סדורה של G מיון $\frac{1}{4}$
 אך נשאל: האם הממוצע (השגיאה) של האירועים?

ת. ניקח את האירועים L המיון והמיון של G (המיון) q .

הענין :

[illegible]

מבנה - חסי ברק וקופרין :

$E[\sum_{i=1}^n x_i] = p \cdot n$

$$P_r \left[\sum_{i=1}^n X_i \geq (1+\delta) p n \right] \leq \exp \left(-\frac{\delta^2 p n}{4} \right)$$

$$P_r \left[\sum_{i=1}^n x_i \leq (1-\delta)pn \right] \leq \exp \left(-\frac{\delta^2 pn}{2} \right) \quad \text{for } 0 < \delta < 1$$

$$P_{\mathcal{H}} \left[\left| \sum_{i=1}^n x_i - pn \right| \geq \delta \right] \leq 2 \cdot \exp \left(-\frac{2\delta^2}{n} \right)$$

תצורה וקטור שלון :

משקעים מוקרנים $x_1, x_2, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$ כאשר $x_i = 1$ \Leftrightarrow חורבן
 של i (תצורה משמאל) $M(x)$ (תצורה למעלה) $\mathbb{R}^{\ell \times \ell}$

$$M = E\left[\sum_{i=1}^L x_i\right] \leq p \cdot L \quad \text{p.s.} \quad P_T[x_i=1] \leq p \quad \text{is } \heartsuit \text{ p.s.} -$$

אנאליזת χ^2 מיון לפי התפלגת הרוק, ולכן יוחזר תשובה שזוהי \Rightarrow לטוחה $\frac{\chi^2}{2}$ מקוריות $N(x)$ התצפיות גשומות שזוהי, סומה

$$\sum_{i=1}^L x_i \geq \frac{l+1}{2}$$

$$P_r[\text{NBO} \mid B(x)] = P_r\left[\sum_{i=1}^l x_i \geq \frac{l+1}{2}\right] = P_r\left[\sum_{i=1}^l x_i - p_l \geq \frac{l+1}{2} - p_l\right] \leq$$

$$\leq P_r \left[\sum_{i=1}^l x_i - pl \geq l \left(\frac{1}{2} - p \right) \right] \leq$$

$$\leq P_r \left[\sum_{i=1}^L x_i - M \geq \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} - p \right) \right] \leq$$

$$\leq P_n \left[\left| \sum_{i=1}^L \chi_i - \mu \right| \geq \lambda \left(\frac{1}{2} - p \right) \right] \leq$$

$$\sup_{(2)} \leq 2 \exp\left(\frac{-2 \cdot \ell^2 \left(\frac{1}{2} - \rho\right)^2}{\ell}\right) = 2 \exp(-2\ell \left(\frac{1}{2} - \rho\right)^2)$$

הקטנו
את 33
נכון

הקטנו
רצו

הוספני
לדבר מוחלט

१०२

(3)

t nic p13j

3) ציור אר

ש. האם לכל בחירה קיים אלגוריתם?

ת. ישנו קצת רבות וכן אין יצוא (וי)

מקסימלית: ארבעה אנשי צוות (אשר יועצו) מאוניברסיטת תל אביב, הנחשבות

2	חוקים/טקסטים -	דעה (מחשבות) ו/או קטטות תאוריות
3	אמצעים חזותיים	

יש בסיס (הם קיים אלגוריתם פולינומי) המבטיח מצבון פתרון שאינו "עצום מיד" ("קטן מיד") ביחס אדגל פתרון מינימלי (מקסימלי).

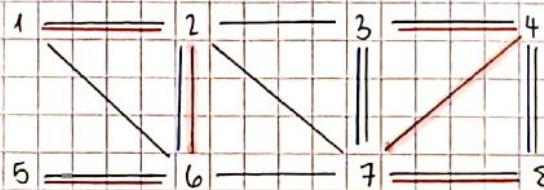
בסיס קירוב קצ"ר

מוסד: קצ"ר לא מכון $G = (V, E)$
 פתרון חוקי: תת קבוצה $C \subseteq V$ כך שלא קשה $(u, v) \in E$
 מקיים: $u \in C$ או $v \in C$.
 יש מצבון פתרון חוקי C קצ"ר מינימלי.

אלגוריתם קירוב אלג"ר בסיס קירוב קצ"ר:

1. אחרון: $C \leftarrow \emptyset$ - הפתרון חסר כל האלמנטים
2. כל עוד $E \neq \emptyset$:
 - 2.1. בחר קשה $(u, v) \in E$ נשאר וקצ"ר $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
 - 2.2. הסר את (u, v) ול הקשה שחלה בהן מחדש.
 3. (חזר את 2).

דוגמת ריצה:



בסיס מינימלי: $C = \{2, 4, 6, 7\}$ קצ"ר 4

נראה 3 ריצה אפשריות:

- ריצה 1: $C = \{2, 4, 6, 7\}$ קצ"ר 4
- ריצה 2: $C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ קצ"ר 6
- ריצה 3: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ קצ"ר 8

נראה בהמשך כי הפתרונות שהוצגו לא יהיו זכרונים מ-8.

מפוסט: אלגוריתם הקירוב תמיד יחזיר פתרון המכיל את כל מקסי Z הקבוצות מהמינימום האפשרי.

הוכחה
 מורכבות
 והאזהרה

הקצ"ר: אלגוריתם אפלטון מקסימיזציה P יורדו אלגוריתם קירוב α (מינימליזציה)

1. זמן ריצה האלגוריתם פולינומי קצ"ר "כזה חתום".
2. קהילת קול X סקור קיים פתרון אופטימלי y .
 האלגוריתם יחזיר פתרון חוקי z כך $val(z) \geq \alpha val(y)$
 $val(z) \leq \alpha val(y)$

- קבועיט מקסימיזציה, $0 < \alpha < 1$
- קבועיט מינימיזציה, $\alpha > 1$

הרצאה 23

טעם: האנצורגס (מחשבוני הקדס) הוא אלגוריתם קירובי-2 קלי"ה כסוי בקורקוס.

הוכחה: (היוט בקורקוס C הנוחצג ע"י האלגוריתם).
 • C הוא כסוי (לטיור פתרון חוקי):
 קבל אטציה הקשמת האוסחג מוהצג מכוסות ע"י
 אוהז הקורקוס שפנכאס C-1. כסויק הריזה
 מקיים כי כל הקשמת הוסח מוהצג ולכן כל
 הקשמת מכוסות.

• **קירוב-2:**
 נסמן ק-F את קורב הקשמת שפנכחו במחנך הריזה.
 כל פתרון חוקי ד מכל (לפחור קנה אוהז על כל
 קשג מ-F קנוסג, הקשמת מ-F צרה בקורקוסיתן
 ולכן $|D| \geq |F|$.

$$|C| = 2|F| \leq 2|D| \quad \text{וכן} \quad |C| = 2 \cdot |F| \rightarrow \text{אנו מחצרים אה 2 הקורקוסים למחציהם כל 3 FM}$$

$$|C| \leq 2 \cdot \text{OPT} \quad \text{וקסנר}$$

תצבור: קלי"ה כסוי בקורקוס קצג כללי ממושתל:

זוסע: שרז לא מכון $G = (V, E)$ ופונקציה משה $w: V \rightarrow \mathbb{R}^+$
 פתרון חוקי: קורב הקורקוס $C \subseteq V$ כך שכל $(u, v) \in E$ מתקיים
 $u \in C$ או $v \in C$ או שניהם.
 יש למכא: פתרון חוקי C קמשה $w(C) = \sum_{u \in C} w(u)$ מינימי.

נתר אלגוריתם הירח אקניה המוסס על הגרנות הוכאה:

1. נכתב תכנית ויניארות (מחל R) תחוסמת את הקר הקוסטימי

2. קיר אלגוריתם אפכרון התוכנית הויניארות שכתבנו (אקזמנה:
 אלגוריתם האוישואיז) וקירל פתרון אושטימי עקור התוכנית
 וליניארי.

3. על הפתרון (ושמור האושטימי עקור התוכנית הויניארה). קיר
 אלגוריתם עיזול (ומחציר פתרון שלם חוקי אקניה המוקריה).

שכר 1: תוכנית A (קנטימי): $\min \sum_{u \in V} w(u) \cdot x_u$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{s.t.:} \quad & x_u + x_v \geq 1 & (\forall (u, v) \in E) \\ (3) \quad & -x_u \geq -1 & (\forall u \in V) \\ (4) \quad & x_u \geq 0 & (\forall u \in V) \\ (5) \quad & x_u \in \mathbb{Z} & (\forall u \in V) \end{aligned}$$

(6) $\min \sum_{u \in V} w(u) \cdot x_u$ תוכנית B (ויניארה):

$$\begin{aligned} (7) \quad \text{s.t.:} \quad & x_u + x_v \geq 1 & (\forall (u, v) \in E) \\ (8) \quad & -x_u \geq -1 & (\forall u \in V) \\ (9) \quad & x_u \geq 0 & (\forall u \in V) \end{aligned}$$

- OPT: הדרך של תוכנית A
- FRAC: הדרך של תוכנית B

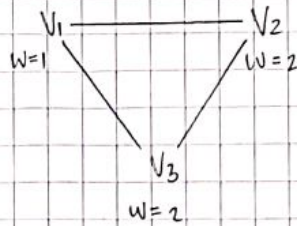
$$FRAC \leq OPT$$

טענה 1:

צורה אחת שראינו כיצד נבנה תכנון אינפורמלי.

הוכחה:

דוגמה:



כיסוי אינפורמלי במערכת 3 - $C = \{V_1, V_2\}$

שלב 2: אינצדנטים (מחלקים) נוספים וקטנים
 $\hat{x}_1 = \frac{1}{4}, \hat{x}_2 = \frac{3}{4}, \hat{x}_3 = \frac{3}{4}$
 נקטל (שמתן) חוקי (על) $3.25 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4}$

נקטל (שמתן) חוקי (על) $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \frac{1}{2}$
 $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.5$

שלב 3: אלגוריתם (דוגמה)

קטל: (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9)
 1. (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):
 2. (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):

$$\hat{x}_u = \begin{cases} 1, & \hat{z}_u \geq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

2. (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):

טענה 2: (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9)
 (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):
 $\sum_{u \in V} w(u) \hat{x}_u \leq 2 \cdot \sum_{u \in V} w(u) \cdot \hat{z}_u$

הוכחה: (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9)
 (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):
 (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):

אינצדנטים (3)-(5) מקיימים כי אלגוריתם (דוגמה) (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9)
 (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):
 (שמתן) חוקי (שמתן) $(\hat{x}_u)_{u \in V}$ (מקיים) את (7)-(9):

בהינתן הנוסחה למטה, נקבע הרכבה טכנית על פי אלוטרכים ולפסקויה:

$$f(x_j) = \begin{cases} T, & f(x_j) = F \\ F, & f(x_j) = T \end{cases}$$

$$(f(x_j)) = 1 - f(x_j) \quad (א)$$

$$f(x_1 \vee \dots \vee x_{k_1}) = \begin{cases} F, & f(x_1) = \dots = f(x_{k_1}) = F \\ T, & \text{אחרת} \end{cases}$$

טיווח נהמטה f מספק פסקויה c_i אם $f(c_i) = T$

דוגמה: קבוצתה (הקבוצה):
 $f(x_1) = f(x_4) = F$
 $f(x_2) = f(x_3) = T$
 אע נהמטה (הוא) אן מספק אר (הפסקויה) (הראשונה)
 וכן מספק אר (הפסקויה) (השנייה) (השלישית).

MAX SAT קבוצה

מונע: פסקויה CNF שבתו $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ מן x_1, \dots, x_n

פסקויה חוקי: (המטה) קבוצתה (הפסקויה)

ש' (מבוא): (המטה) מספק זכרן מיוגר על (פסקויה)

המטה:

- גמץ נוח שאל משהו אן מושיע יתר משהו אמת באמת (פסקויה)
- ישנם מ פסקויה בקלט. במקרה הטוב ניתן לספק אר בזמן ארן לא מיוז

דוגמה:
 $(x_1) \wedge (x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$
 אס אן אן אספק אר 3 (הפסקויה).

24 הנצחה

המקבץ - קביעת MAX SAT

תיאור קטנה תוכנית לניסוח:

- נקנה תוכנית מתמטית קטנה, הנתמכת את הקטנה.
 (מאחר כי, ברוב קטניות 0 ו-1) הקטנה. $F=0, T=1$.
 קטניות: $f(x_i)=1$ או x_i קיבל T קטניות f .

- אולי נבחר את f ונבחר T או F ?
 $f(\ell) = f(x_i)$ אם $\ell = x_i$ א
 $f(\ell) = 1 - f(x_i)$ אם $\ell = \bar{x}_i$ א
 $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ קטניות:

$$f(x_1) + (1 - f(x_2)) + f(x_3)$$

- אולי נבחר את פסוקית $C_i = (\ell_1 \vee \dots \vee \ell_{k_i})$ ונבחר f (כלומר את $f(C_i)$?)
 הסכום $\sum_{s=1}^{k_i} f(\ell_s)$ נבחר כמון ונבחר פסוקית הסכום

תחת f אם הסכום $1 \leq$ נבחר $f(C_i)=1$
 אחרת, הסכום $0 =$ ונבחר $f(C_i)=0$

$$f(C_i) = \min \{1, \sum_{\ell \in C_i} f(\ell)\} =$$

$$= \min \{1, \sum_{j: x_j \in C_i} f_j + \sum_{j: \bar{x}_j \in C_i} (1 - f_j)\}$$

$$\max \sum_{i=1}^m f(C_i) = \text{פונקציה המטרה שלנו:}$$

$$= \max \sum_{i=1}^m \min \{1, \sum_{j: x_j \in C_i} f_j + \sum_{j: \bar{x}_j \in C_i} (1 - f_j)\}$$

בעיה: פונקציה המטרה הנ"ל לא נראית כמו תוכנית ליניארית,
 לא ניתן להפוך \max של \min .

פתרון: נראים לנו פסוקית C_i משתנה חדש y_i אשר "נראים"
 לערך \min של (הפסוקית).

$$(1) \quad \max \sum_{i=1}^m y_i \text{ such that: } A \text{ תוכנית}$$

$$(2) \quad y_i \leq 1 \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$(3) \quad y_i \leq \sum_{j: x_j \in C_i} f_j + \sum_{j: \bar{x}_j \in C_i} (1 - f_j) \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$(4) \quad f_j \leq 1 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$(5) \quad y_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$(6) \quad f_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$(7) \quad f_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j=1, \dots, n$$

סיכום: $\text{OPT} =$ הסכום המסיק (המקסימלי) שאפשר להשיג
 $\text{OPT}' =$ (המאפשר) של תוכנית A .

טענה 1: $OPT' \geq OPT$

הוכחה: תהי f העימה קוליאונית אפסימילית אקס, $f_j = f(x_j)$ כעבור מספרות OPT פסוקיות. נתאר הצקה אפסימילית $\hat{y}_i = f(c_i)$ נשים \heartsuit כי זהו פתרון חוקי לתוכנית A . לדרך פועקצית הטיטה שלו הוא OPT .
כן, חלוקה האפסימילית של תוכנית A מקיים $OPT' \geq OPT$.

הערה: ניתן להראות $OPT' = OPT$ אך לא נצדיקו לצד קניחת האלגוריתם.

בעיה: תוכנית A הונה כעמליות וכן אינה תוכנית אינארית.

פתרון: נקבל הקסציה ונוותר על אינאריות (העמליות)

תוכנית B : זהו תוכנית A , מאקל העקיצה כי וויתרנו על אינאריות (העמליות) וזוהי תוכנית אינארית.

סימון: מסמן $FRAC$ את חלק האפסימילי של תוכנית B .
כעבור תוכנית A , נשמע כעמליות y_i, f_j
כעבור תוכנית B נשמע כעמליות \hat{y}_i, z_j

טענה 1: $FRAC \geq OPT' \geq OPT$

אלגוריתם העיגור

את תוכנית B ניתן לפתור בעזרת פולינומי (אלגוריתם האלגוריתם) פתרון של תוכנית B לא יתקבל מוכנה ממשותף של 0 או 1 ולכן לא מייצג העימה קוליאונית אפסימילית הנסוק (בזו אלגוריתם עיגור).

$RAND-ROUND((\hat{z}_j)_{j=1}^n, (\hat{t}_i)_{i=1}^m)$

קט: פתרון חוקי $(\hat{z}_j)(\hat{t}_i)$ לתוכנית B לא $j \in \{1, \dots, n\}$ כאופן קט z_j קהסתיות אחרת $f_j^* = \begin{cases} 1 & , z_j \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$ לא $i \in \{1, \dots, m\}$ נצדיק t_i אם העימה $(f_j^*)_{j=1}^n$ אפסימילית אחרת $y_i^* = \begin{cases} 1 & , (f_j^*)_{j=1}^n \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$

בזמנה: $\hat{z}_1 = 0.3$, $\hat{z}_2 = 0.7$, $\hat{z}_3 = 0.99$

$f_1^* = 1 - \begin{matrix} 0.3 & \text{קהסתיות} \\ 0.7 & \text{קהסתיות} \end{matrix}$
 $f_1^* = 1 - 0.3 = 0.7$

הערה: האלגוריתם יחזיר תמיד פתרון חוקי לתוכנית A .

טענה 2: וכל פתרון חוקי $(\hat{z}_j)(\hat{t}_i)$ לתוכנית B , אלגוריתם העיגור על הפתרון יחזיר פתרון חוקי אפסימילי הנסוק P שמוחל מספר הנסוקיות המסוקות מוקיימות:
 $E[\sum_{i=1}^m y_i^*] \geq (1 - \frac{1}{e}) \sum_{i=1}^m t_i$

תיאור האלגוריתם:

1. קחינו קלט $C = c_1, \dots, c_m$ וקלטנו ϵ , קבעו את התוכנית העניינית ϵ .
2. (במקור את תוכנית ϵ) (אלגוריתם האוישטאין) וקלט פתרון שקרי $\hat{z}_j, \hat{t}_j, \hat{z}_j, \hat{t}_j$ כולל סדר אושטאין FRAC .
3. נרץ על הפתרון את אלגוריתם הרייז RAND-ROUND ונקבל העימה $(f_j^*)_{j=1}^m$ וקריה.
4. נחזיר את ההעמה והקולטאות שקריות.

ייעוץ: האלגוריתם מחזיר העימה וקריה ונשמע כי עתה נחזיר את הפסוקיות המכוסות (או) ונחזיר $\text{OPT} (1 - \frac{1}{e})$

הוכחה: כאשר נרץ את האלגוריתם הרייז קבלנו 3, נקבל העימה וקריה כך שלפי טענה 2, מספר הפסוקיות המכוסות לא ירד (או) נשחית.

$$(1 - \frac{1}{e}) \sum_{i=1}^m \hat{t}_i = (1 - \frac{1}{e}) \cdot \text{FRAC} \geq (1 - \frac{1}{e}) \text{OPT}$$

\downarrow
 טענה 1

$\text{FRAC} =$
 החזק של פתרון אושטאין.

טענה 1: לכל פסוקיה c_i האלגוריתם מסתכן את הפסוקיות בהסתברות $(1 - \frac{1}{e}) \hat{t}_i$

$$C = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$$

ביטוי:

מקום על ההצמח $\hat{z}_j = \frac{1}{n}$ או j , וכן $\hat{t}_i = 1$

ההסתברות של \hat{t}_i נסמך את הפסוקיות (או) ההסתברות שיוצא 0 או 1 אחר מהמטען וזה קורה בהסתברות $(1 - \frac{1}{n})^n \approx \frac{1}{e}$.
 לכן, בהסתברות $(1 - \frac{1}{e}) \hat{t}_i$ מסתכנים את c_i .

הוכחת טענה 2: $E[\sum_{i=1}^m y_i^*] = \sum_{i=1}^m E[y_i^*] =$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m (0 \cdot \Pr[y_i^* = 0] + 1 \cdot \Pr[y_i^* = 1]) = \\
 &= \sum_{i=1}^m \Pr[y_i^* = 1] = \sum_{i=1}^m \Pr[c_i \text{ מסתכנת } (f_j^*)_{j=1}^m] \geq \\
 &\geq \sum_{i=1}^m (1 - \frac{1}{e}) \hat{t}_i = (1 - \frac{1}{e}) \sum_{i=1}^m \hat{t}_i
 \end{aligned}$$

\uparrow
 טענה 1

הוכחת טענה 3: אי-שוויון 1: $1 - \delta \leq e^{-\delta}$ כל δ

- תהי c_i פסוקית. נותן את ההסתברות שהפסוקיה c_i מסתכנת.

הם קומ אים ב לטל קטקויה מוקל השמה וכו' אפס.

$$Pr[C_i \text{ מאתאט } (f_j)_{j=1}^n \text{ הוהטק}] = Pr[\forall l \in C_i : f^*(l) \neq 1] =$$

המקרה

$$= \prod_{l \in C_i} Pr[f^*(l) \neq 1] = \prod_{l \in C_i} (1 - Pr[f^*(l) = 1])$$

המקרה

$$= \prod_{l \in C_i} \exp\{-Pr[f^*(l) = 1]\} =$$

אם

$$= \exp\left\{-\sum_{l \in C_i} Pr[f^*(l) = 1]\right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z}_j \\ 1 - \hat{z}_j \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{אם } l = x_i \\ \text{אם } l = \bar{x}_i \end{array} \quad \begin{array}{l} p_k \\ p_k \end{array}$$

$$= \exp\left\{-\left(\sum_{j: x_j \in C_i} \hat{z}_j + \sum_{j: \bar{x}_j \in C_i} (1 - \hat{z}_j)\right)\right\} \leq$$

$$\leq \exp(-\hat{t}_i)$$

אם אלו (3)
כי המהלך מושג
חוק.

המקרה: C_i לא קטקויה

$$Pr[C_i \text{ מאתאט } (f_j)_{j=1}^n \text{ הוהטק}] \geq 1 - e^{-\hat{t}_i} \geq (1 - \frac{1}{e}) \hat{t}_i$$

$$(1 - e^{-t}) \geq (1 - \frac{1}{e}) \cdot t \quad \text{אם } t \in [0, 1] \quad \text{המקרה}$$

הרצאה 25

תזכורת: קצירת הרגשות

קלט: אוסף של n פריטים. פריט i (כאשר $1 \leq i \leq n$) יש מחיר w_i ומחיר p_i . קוסי, ניתן לקרר w . כל המספרים שלמים ואי שליליים.

פירוק חוקי: תת קבוצה $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ במחיר $w(I) = \sum_{i \in I} w_i \leq W$

יש למצוא: פירוק חוקי I במחיר $P(I) = \sum_{i \in I} p_i$ מקסימלי.

מספר מרצון הקיט: נסמן $p_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$ את

המחיר המקסימלי של מוצר כלשהו בקלט. קיים אלגוריתם לקצירת הרגשות במחיר $O(n^2 \cdot p_{\max})$ ריצה

משפט: לכל $0 < \alpha < 1$ קיים אלגוריתם הרוק (א) $(1-\alpha)$ לקצירת הרגשות הרוק $O(n^2/\alpha)$

מה זה אומר? יהיו $I^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ פירוק אופטימלי (מופל) הנתן בקלט מחיר $OPT = P(I^*)$ אלגוריתם הקירוב שנקרא מחציר פירוק חוקי $(1-\alpha) OPT$ קבל מחיר $(1-\alpha) OPT$

הוכחה: נקבע $0 < \alpha < 1$. האלגוריתם:

קלט: מופל כלשהו לקצירת הרגשות: $(w_1, p_1), (w_2, p_2), \dots, (w_n, p_n), W$. כהן נניח כי לכל i מתקיים $w_i \leq W$ (אחרת נזרוק i מתקלט)

1. הסדר $p_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$ ונסמן: $\delta = \frac{\alpha \cdot p_{\max}}{n}$

2. נסדר מופל חדש לקצירת הרגשות: $(w_1, p_1^*), \dots, (w_n, p_n^*), W$ כאשר לכל i מתקיים $p_i^* = \lfloor p_i / \delta \rfloor$

3. הרק אף האלגוריתם מרצון הקיט של המופל החדש ונקבל קבוצת מוצרים $I^* \subseteq \{1, \dots, n\}$

4. הרק את I^*

הוכחה (כינות):

יהי I פירוק אופטימלי (מופל) חקורי ונסמן $OPT = P(I) = \sum_{i \in I} p_i$

די I^* הפירוק המופל I^* האלגוריתם מרצון הקיט קבלק 3 נכחו שפירוק המופל I^* האלגוריתם (כונ).

אפי נכונה האלגוריתם מרצון הקיט, I^* הוא פירוק אופטימלי למופל החדש (שמופל קבלק 2)

נסמן את המחיר של I^* ביוחס $OPT^* = P(I^*) = \sum_{i \in I^*} p_i^*$ החדש i כ- p_i^*

ש.
ת.

מה קרה עכשיו?
האנדרגראד מרגיש חמור פחות או קצת הרגוע יותר
ל"פ שמואל כיום טיפה עקור על למורה ולל מחיר
אפשרי.

קלצם יום שמואל כאן זה שלדי והזט אשמון מקורם.
מאשיק אקנות טכנולוגיה הרבה עמות למורה
(היה יקני לרבים "טלוגרף")

נצמין ורדל שבידלית התרמיו (ויאנדרגראד שפיר אמה)
לא הייתה צריכה שהמחירים יהיו נמוכים.

מקורה ככה, חיינו יכולים פשוט להצטרף את המחירים
החזשים כ- $P_i^* = P_i / \delta$.

אז חיינו מקבלים: $P(J) = \sum_{j \in J} P_j = \sum_{j \in J} \delta \cdot P_j^* = \delta P^*(J)$

כאשר המחירים החזשים היו שרשראותיים לשינוי ואז א
היינו מוצאים שמואל אופטימלי למופל החזש (ואז זס היה
אופטימלי למופל המקורי).
לכלדע, באנדרגראד בן יש צריכה למחירים נמוכים ולכן לידנו
מחירים.

מה הפסדנו ומה הרווחנו?

מכר אחרי, אנו חוצים שם יהיה כמה שיותר גדול כי אז
המחירים החזשים יהיו כמה שיותר קטנים ואז שמואל הריצה
של האנדרגראד מתגלגל להיות יהיה קטן יותר.

מכר שני, כשאנחנו מחזקים את δ , אנו מפסידים מקומם
פני $P(J) = \sum_{j \in J} P_j = \sum_{j \in J} \delta \cdot P_j^* \geq$

$$\geq \sum_{j \in J} \delta (L^{\delta} - 1) = \delta \sum_{j \in J} P_j^* - \delta \sum_{j \in J} 1 =$$

$$= \delta \cdot P^*(J) - \delta |J|$$

ש. למה לא יכלנו לתקן אנדרגראד קורם בלבד אמה שיטת
שראית כחורצאות (הקולמוס) (ממוסמך) גמנו (אין אר)?

ת. תכנה כמפלים אפלה ווא: $\max \sum_{i=1}^n P_i x_i$ such that:

$$\sum_{i=1}^n W_i x_i \leq W$$

$$0 \leq x_i \leq 1$$

$$x_i \in \mathbb{Z}$$

← קשה לראות מנגיף אינטואיטיבית
(נצטק) אחר על אינלוצ זה

$$P_1 = P_2 = 100$$

$$W_1 = W_2 = 100$$

$$W = 199$$

צומחה:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0.99$$

פמרון אופטימלי LP- / 199
לל סק