מספר קורס: 364-1-4241
מרצה: אלה שגב

יוצר המסמך: בת-אל קטני

סוג החומר: סיכום הרצאות

שם הקורס: מבוא לקבלת החלטות

2021

באדיבות מדור אקדמיה, אגודת הסטודנטים, אוניברסיטת בן גוריון.
www.bgu4u.co.il

סיכום החומר בקבלת החלטות (חלק שלישי):

	מצבי טבע	
תוצאות	a_1	a_2

יחס העדפה - מקבל ההחלטה יכול להחליט אם הוא מעדיף X או Y בהינתן הפעולות ומצבי הטבע. (אם תוצאה מועדפת יותר היא תקבל דירוג גבוה יותר).

קריטריונים לקבלת החלטות -

(1) קריטריון הדומיננטיות: אם קיימת פעולה שבכל מצב טבע מבטיחה לתוצאה הטובה ביותר, באותו מצב טבע לו פעולה דומיננטית והיא תיבחר.

(2) קריטריון המקסמין - נסמן את המס בתא i,j כ u_{ij} ונגדיר לכל שורה v_i שהיא רמת הבטחון של הפעולה a_i: $v_i = \min u_{ij}\ (\forall j)$ ונבחר פעולה a_k שעבורה זוכה לה מקסימום. (בכל שורה נגדיר v_i שהוא המינימום. נבחר v_k שהוא המקסימום מבין v_i). • קריטריון פסימי - בגוא נקח מה שהכי פחות גרוע מבין הגרועים. • זק אם היינו מגיבים גם אחרים אבל שומרים על אותו יחס העדפה היינו מקבלים אותה תוצאה.

(3) קריטריון המקסיקס- נגדיר לכל שורה w_i: $w_i = \max(u_{ij})\ (\forall j)$ ונבחר a_k מקסימלי מבין w_i. (מקסימום בטבעה). • קריטריון שדומה בהוסטימיות. • זק אם היינו מגיבים גם אחרים אבל שומרים על אותו יחס העדפה היינו מקבלים אותה תוצאה. • פחות אינטואיטיבי ממקסמין.

(4) קריטריון החרטה - נמצא את המקסימום בכל עמודה - m_j.
עבור כל תא במטריצה נבנה את חישוב החרטה [כיצד נתחרט אם נבחר בתוצאה הזו במצב טבע הספציפי]: $r_{ij} = m_j - u_{ij}$. נקבל את מטריצת החרטה.
נגדיר לכל שורה את החרטה המקסימלית: $R_i = \max r_{ij}\ (\forall j)$.
ונבחר את הפעולה a_k שעבורה נקבל חרטה מינימלית $R_k = \min R_i\ (\forall i)$.
• אם נשנה ערכים ונשמור יחס לא מטוה שפי קריטריון החרטה נקבל אותה החלטה.
• קריטריון החרטה אינו מקיים "אי תלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות".
כ"ן שאם כשהייתה בחירה בין 2 אלטרנטיבות בחרנו למשל את הראשונה, כשיוסיפו לי אלטרנטיבה שלישית (והשאיר האחרות ישארו בדיוק אותו דבר) אובחר פתאום את האלטרנטיבה השנייה.

(5) הקריטריון של הורביץ - לכל שורה נגדיר t_i: $t_i = (1-\alpha)\cdot\underbrace{\min_{\forall j} u_{ij}}_{\text{מינימום בשורה}} + \alpha\cdot\underbrace{\max_{\forall j} u_{ij}}_{\text{מקסימום בשורה}}$

כאשר $1 \geq \alpha \geq 0$ ← עקרון מקסמין, $\alpha = 1$ ← עקרון מקסימקס

נבחר פעולה a_k שעבורה $t_k = \max_{\forall i} t_i$ (מקסימום מבין הוסטימיות).
• לא מקיים עמידות למספרי התועלת. • אינו מקיים אי תלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות.

Scanned with CamScanner

(ג) קריטריון אי הודאה - נגדיר לכל שורה $\bar{u}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$ (ממוצע השורה)
ונבחר פעולה שעבורה $\bar{u}_k = \max_{\forall i} \bar{u}_i$ (מקסימום מבין הממוצעים).

• קריטריון זה לא מקיים עמידות למספרי תועלת.

ערך המידע - = תוחלת רווח בלי המידע - תוחלת רווח עם המידע
נרכוש מידע רק אם מחיר המידע < ערך המידע.

נוסחאות בי"ס: $P_r(A/B) = \frac{P_r(A\cap B)}{P_r(B)}$

נוסחאות ההסתברות השלמה: $P_r(A) = P_r(A\cap B) + P_r(A\cap \bar{B})$

ערך המידע אומר כמה המידע יכל להוסיף לי לתוחלת הרווח.

מודל לחישוב ערך המידע בבעיית החלטה:
בעיית החלטה: • פעולות/אלטרנטיבות $(a_1 \dots a_k)$ • מצבי טבע $(s_1 \dots s_m)$
• הסתברויות למצבי הטבע $(\pi_1 \dots \pi_m)$; $0 \le \pi_i \le 1$, $\sum \pi_i = 1$
• מטריצת התשלומים/התועלות $[k\times m]$ מגדרת $V_{k\times m}$:
• התועלות של פעולה a_i במצב טבע s_j (u_{ij}).

$$V_{k\times m} = \begin{array}{c|c} & s_1 \dots s_m \\ \hline a_1 \\ \vdots \\ a_k & \begin{pmatrix} u_{ij} \end{pmatrix} \end{array}$$

• בהינתן מידע, נגדיר מטריצת המידע $P_{m\times n}$ שהיא מטריצה סטוכסטית

$$P_{m\times n} = \begin{array}{c|c} & y_1 \dots y_n \\ \hline s_1 \\ \vdots \\ s_m & \begin{pmatrix} P_{ij} \end{pmatrix} \end{array}$$

• $y_1 \dots y_n$ - מצבים אפשריים (סיגנלים) שהמידע יכול לתת -
$P_{ij} = P_r(y_i | s_i)$
(בדגימת כדור בודד, הסיגנלים הם שחור=y_2, אדום=y_1).

(P_{ij}) מהימנות המידע - אם ידוע שמצב הטבע הוא X מה ההסתברות שאוקבל סיגנל מסוג y_i
מטריצה סטוכסטית - • כל איבריה בין 0 ל1. • ההסתברות בכל שורה משלימה ל1.
(אם זה לא משתלם ל1, סימן שיש עוד סיגנל אפשרי).
מידע מושלם - מידע הזה מושלם אם מתקיים: $P_{ij}(s_i|y_j) = 1$ או 0 . $\forall i, \forall j$
• אם בכל עמודה יש מס' חיובי אחד בלבד! $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
ערך מידע שווה 0 - $P(s_i|y_j) = P(s_i)$. כלומר, המידע לא נותן כלום. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
• אם יש במטריצה מידע שורות זהות זו מטריצה לא ערך מידע 0. $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

איך נחשב ערך מידע של מטריצת המידע P בבעיית החלטה? נמצא מטריצת החלטה אופטימלית.

$$\underset{m\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{D}\cdot\underset{k\times m}{V}=\underset{m\times m}{B}$$

נמצא מטריצה סטוכסטית $D_{n\times k}$ כך שתמקסם: $\sum \Pi_i b_{ii}$ אוילרי הוצלבון.

(מצמי סמן) אפשרויות

$$\begin{pmatrix} P \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad_{11}+bd_{22} & - \\ - & cd_{11}\dots \end{pmatrix}$$

רק הוצלבון מעניין

נחפש $z=\max \Pi_i b_{11}+\Pi_i b_{22}$. ניתן 1 אם נרצה למקסם וס אם לא (במטריצה D).

אם המקדמים של d_{ij} כתוב אצ לא משנה למי ניתן ערך 1 ונקבל אופישות בין הפעולות. נצטרך שצו מטריצה סטוכסטית (0/1) ולא יכולות להתקבל כמה אופשרויות עם אותו הרווח.

איך נמקסם? נסתכל על כל האוילרים באותה שורה ונבחר לתת 1 למקדם הכי גדול!

איך נחשב תוחלת הרווח לפי מידע?

נמצא מטריצת החלטה D אופטימלית עם שורות כתות שתמקסם $\sum \Pi_i \tilde{b}_{ii}$

ע"מ כאן נחפש $z=\max \Pi_i \tilde{b}_{11}+\Pi_i \hat{b}_{22}$

מחליף b_{22}.

חישוב ערך המידע במטריצה P:

אחרי שחישבנו תוחלת רווח עם מידע נשאר בלי מידע נוכל לחשב ערך מידע.

$$V(P_i V)=\underbrace{\sum \Pi_i b_{ii}}_{\text{כאשר D אופטימלית בהינתן מידע}}-\underbrace{\sum \Pi_i \tilde{b}_{ii}}_{\text{כאשר D אופטימלית לפי המידע}}$$

משפט Blackwell: $V_n(P_i,V)\geq V_n(Q_i,V)$ לכל Π_i אם ורק אם קיימת מטריצה סטוכסטית $R_{n\times n}$ כך ש $\underset{m\times n}{P}\cdot\underset{n\times n}{R}=\underset{m\times n}{Q}$.

- כדי להשתמש במשפט 2 המטריצות (P,Q) חייבות להיות באותו הגודל.
- אם הן לא באותו גודל - נוסיף עמודה פיקטיבית למטריצה Q של אפסים.

אם לא נצליח למצוא R כזו ← לא ניתן לקבוע בצורה חד משמעית למי מטריצת מידע יותר טובה. $V(P)\geq V(Q)$

אם קיימת R כזו $P\cdot R=Q$ אבל לא קיימת R כזו $Q\cdot R=P$ ← $V(Q)\neq V(P)$ ערך המידע של P גדול משל R.

Scanned with CamScanner

• ערך המידע בפעימת 2 כדורים תמיד יותר קטן מפעימת כדור בודד (הוכחה בעצרת בקווים).

• בפעימה ללא החזרה נקבל תמיד ערך מידע. זפ/ושווה מפעימה עם החזרה.
אם מס הכדורים בכד אינו ידוע - המשפט הזה לא בדוקאי נכון.

מסקנות ממשפט בלאוקוולן:

(1) $V_n(P,U) \geq 0$ לכל P,U,n. כיוון שאי יכול להיות שמידע יהיה למעבר יותר גרוע ממה שאינו נמצאת בו - במקסימום הוא פשוט לא יתרחש.
הוכחת המשפט - • כל אחד מהסינגלים מתקבל באותה הסתברות בכל מצב טבע אפשרי (ערך מידע=0) $Q_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

• ההסתברות שנתתי למצב טבע מהיותן הסינגל היא בדיוק ההסתברות שנתתי למצב הטבע - הסינגל לא אוצר. $V_n(Q,U)=0$.

נראה שלכל מטריצת מידע P קיימת R כך ש $P\cdot R=Q$.

• נעבה מכך ש P סטוכסטית. אפשר להוכיח זורם משוקלל $\frac{1}{n}$ ונסכם כל שורה ל 1 (בפ).

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ P_{m1} & \cdots & P_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

ולכן המסקנה היא $V(P,Q)=0 \leq V(P,U)$, לכל P,U.

(2) ערך המידע של מטריצת היחידה הוא ערך המידע הגדול ביותר שיכול להתקבל בכל בעיית החלטה (מידע מושלם).
הוכחת המשפט - נראה שלכל מטריצת מידע Q קיימת R כך: $P\cdot R=Q$
ולכן - $V_n(P,U) \geq V_n(Q,U)$ לכל n, P.

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n-m}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_{n\times n}} = Q_{m\times n}$$

(3) כל מטריצה שבה בכל עמודה יש מס חיובי יחיד נותנת אותו ערך מידע כמו מטריצת היחידה.
ההוכחה בעצרת בזכות הכדורים. מראים שכשמכפילים אותה במטריצה סטוכסטית מקבלים את מטריצת היחידה ולכן היא טובה לפחות כמוהה.

Scanned with CamScanner

מופע תוחלת התועלת -

פרדוקס סנט פטרסבורג / פרדוקס ברנולי: משלמים 2$ ומקבלים מטבע:
אם יצא עץ - הקופה מכפילה עצמה וצוחקים שוב.
אם יצא פלי - המשחק נגמר והשחקן לוקח את הקופה.
השאלה היא כמה כן אדם יהיה מוכן לשלם?
מה תוחלת הרווח במשחק? אם המשחק מסתיים אחרי n הטלות אז $=2^n$.
ההסתברות שהמשחק יגמר אחרי n הטלות $=(\frac{1}{2})^n$. ולכן תוחלת הרווח:
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (\frac{1}{2})^n \longrightarrow \infty$$
מה הטענה של ברנולי? אנשים לא באמת יסכימו לשלם כל סכום (∞)
ולכן יש להסתכל על תוחלת התועלת ולא על תוחלת הרווח.
ברנולי הציע שהתועלת של הפרס x היא $\ln(x)$ ולכן תוחלת התועלת:
$$\sum (\frac{1}{2})^n \cdot \ln(2^n) = \ln(4) \sim 1.38$$

מרכיבי המודל - (1) X - קבוצת התוצאות שיכולות להתקבל בכל החלטה
ובכל מצב טבעי $X=\{x_1,\dots,x_n\}$.
(2) אלטרנטיבות - הצגלות על פני קבוצה X: $P=\{p_1\dots p_n\}$. $(0\le p_i\le 1,\ \sum p_i=1)$
(נקרא את וקטור P כתלות במספר של וקטור התוצאה.
(3) יחס העדפה של הפרט על פני ההתפלגות: $p\ge q$ ("טובה לפחות").
• יחס העדפה חלש: $p>q$ אם $p\ge q$ ולא $p\ne q$.
• יחס אדישות: $p\sim q$ אם $p\ge q$ ולא $q\ge p$.

פונקציות ליחסי העדפה:
(1) יחס העדפה של מקסמין - נסדר את קבוצת התוצאות מהטובה ביותר לגרועה ביותר.
לכל הצגלה P נגדיר: $a_p=\max\{i \mid p_i>0\}$ [בהינתן וקטור הצגלה - איפה
ההסתברות האחרונה שמקבלת הסתברות חיובית? כלומר, מה הגרוע ביותר שיכול לקרות?]
יחס העדפה של מקסמין אומר ש $p\ge q$ אם ורק אם $a_p\le a_q$.
מתי מתקיים $p\sim q$? כאשר $a_p=a_q$.

(2) יחס לקסיקוגרפי - נסדר את התוצאות מהטובה ביותר לגרועה ביותר.
$p\ge q$ כאשר $p_1\ge q_1$ $\underline{\subset}$ ($p_1=q_1$ ולא $p_2\ge q_2$) $\underline{\subset}$ ($p_1=q_1$ ולא $p_2=q_2$ ולא $p_3\ge q_3$)
או $p_i=q_i$ לכל $i=1\dots n$.
מתי מתקיים $p>q$? אם קיים אינדקס k כך ש $p_i=q_i \dots$ ולא $p_k>q_k$.
מתי מתקיים $p\sim q$? אם ורק אם $p=q$, כלומר - צדדים נחלטין.

(3) יחס העדפה של תוחלת תועלת - אם קיימת פונקציה $u: X \to \mathbb{R}$ כך ש $p \geq q$ אם ורק אם: $\sum p_i u(x_i) \geq \sum q_i u(x_i)$. (תוחלת תועלת יותר גדולה).

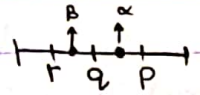
משפט תוחלת התועלת של פון נוימן ומורגנשטרן:

תכונות של יחסי העדפה:

(1) שלמות - אם לכל p,q מתקיים: $p \geq q$ או $q \geq p$. כלומר, הפרט יודע לומר תעדוף.

(2) טרנזיטיביות - אם לכל p,q,r מתקיים: $p \geq q$ וגם $q \geq r$ $\leftarrow$ $p \geq r$.

(3) רציפות - לכל 3 הרצועות המקיימות $p > q > r$:



קיים $\alpha \in (0,1)$ כך ש $\alpha \cdot p + (1-\alpha) \cdot r > q$

קיים $\beta \in (0,1)$ כך ש $\beta \cdot p + (1-\beta) \cdot r < q$

(4) אי תלות - אם לכל p,q,r:

לכל $\alpha \in (0,1)$: אם $p \geq q$ $\leftarrow$ $\alpha \cdot p + (1-\alpha) \cdot r \geq \alpha \cdot q + (1-\alpha) \cdot r$

איזה תכונות מקיים יחס העדפה מקסמין?

1. שלמות - מתקיימת.
2. טרנזיטיביות - מתקיימת (במספרים הטרנזיטיביות מתקיימת).
3. רציפות - לא מתקיימת. דוגמא נגדית: $p=(1,0,0)$ $a_p=1$ $q=(0.7,0.3,0)$ $a_q=2$ $r=(0.5,0.3,0.1)$ $a_r=3$

אם $p>q>r$: $\alpha p + (1-\alpha) r = (\alpha + 0.5(1-\alpha), (1-\alpha)\cdot 0.3, 0.1(1-\alpha)) < q$

אפילו ב-3 זכים רציפות לא מתקיימת. [אם $p>q$ אז $a_p < a_q$].

4. אי תלות - מתקיימת. • הוכחה: נניח $p \geq q$ הוא בהכרח המסקנה מתקיימת?

$a_{\alpha q + (1-\alpha) r} = \max\{a_q, a_r\}$, $a_{\alpha p + (1-\alpha) r} = \max\{a_p, a_r\}$

$a_p \leq a_r \leftarrow \max\{a_p, a_r\} \geq \max\{a_q, a_r\}$.

איזה תכונות מקיים יחס סדר לקסיקוגרפי?

1. שלמות - מתקיימת.
2. טרנזיטיביות - מתקיימת.
3. רציפות - לא מתקיימת. דוגמא נגדית: $r=(0,0.8,0.2)$ $p=(0.5,0.3,0.2)$ $q=(0.5,0.2,0.3)$

$t = \alpha p + (1-\alpha) r = (\alpha \cdot 0.5, 0.3\cdot\alpha + 0.8(1-\alpha), \overbrace{0.2\alpha + 0.2(1-\alpha)}^{0.2}) \not\succ q$

תמיד נגדיל את q על פני הווקטור t כי $0.5\alpha < 0.5$ וזו הפרה של רציפות.

4. אי תלות - מתקיימת. • הוכחה: $p \geq q \leftarrow \alpha p + (1-\alpha) r \geq \alpha q + (1-\alpha) r$ $\forall \alpha \in (0,1)$

Scanned with CamScanner

אם שמתקיים $p_i = q_i$ לכל $1 \le i \le n$ וגם $\alpha p_i + (1-\alpha) r_i = \alpha q_i + (1-\alpha) r_i$ $\forall i$

אזי ש $p > q$ כאשר קיים אינדקס k כך ש $p_i = q_i$ $\forall i = 1..k-1$

ולגם $p_k > q_k$. וגם מתקיים: $\alpha p_i + (1-\alpha) r_i = \alpha q_i + (1-\alpha) r_i$ $i = 1 \dots k-1$

וגם מתקיים: $\alpha p_k + (1-\alpha) r_k > \alpha q_k + (1-\alpha) r_k$.

כלומר, $\forall \alpha$ $\alpha p + (1-\alpha) r > \alpha q + (1-\alpha) r$.

דוגמא ליחס העדפה שאינו מקיים שלמות? $p \ge q$ אומר $p_1 > q_1$ וגם $p_2 > q_2$

$p \ge q$ x וגם $p \ge q$ x. $(0.5, 0.3, 0.2) \succsim (0.4, 0.4, 0.2)$

דוגמא ליחס העדפה שאינו מקיים טרנזיטיביות? $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$p \ge q$ אומר $p_i \ge q_i$ עבור לפחות 2 אינדקסים i. $i = \{1,2,3\}$

נניח: $p = (0.5, 0.2, 0.3)$, $q = (0.5, 0.4, 0.3)$. $p_3 \ge q_3$ וגם $p_1 \ge q_1$

$p_1 \le q_1$ וגם $p_2 \le q_2$ אזי אדישים בין p ל q.

הערה לגבי טרנזיטיביות: $p \ge q$ וגם $q \ge r$ ← $p \ge r$ אזכר זה $p > q$ וגם $q > r$ אז $p > r$.

הוכחת ההערה - נניח בשלילה כי מתקיים: $p \ge r$. כלומר $p > q$, $q > r$

וגם $p \ge r$. בפרט: $p \ge q$, $q \ge r$, $p \ge r$. מטרנזיטיביות: $q \ge r$ וגם $p \ge r$ ואז $p \ge q$.

קיבלנו סתירה ולכן הטענה נכונה.

משפט תוחלת התועלת ויחס העדפה: יחס העדפה של הפרט מקיים שלמות, טרנזיטיביות, רציפות ואי תלות אם וכך אם הוא יחס העדפה של תוחלת התועלת.

הוכחה (תוחלת תועלת מקיים 4 התכונות) -

(1) שלמות - אינטואיטיבי.

(2) טרנזיטיביות - $p \ge q \leftrightarrow \sum p_i u(x_i) \ge \sum q_i u(x_i)$. $q \ge r \leftrightarrow \sum q_i u(x_i) \ge \sum r_i u(x_i)$

$r \ge p \leftrightarrow \sum p_i u(x_i) \ge \sum r_i u(x_i)$ ולכן הטרנזיטיביות מתקיימת.

(3) רציפות - לכל 3 הגרלות $p > q > r$: קיים $\alpha \in (0,1)$ $\alpha p + (1-\alpha) r > q$

$\sum p_i u(x_i) > \sum q_i u(x_i) > \sum r_i u(x_i)$

$\alpha p + (1-\alpha) r = (\alpha p_1 + (1-\alpha) r_1, \dots, \alpha p_n + (1-\alpha) r_n)$

$\sum (\alpha p + (1-\alpha) r) \cdot u(x_i) = \alpha \sum p_i u(x_i) + (1-\alpha) \sum r_i u(x_i)$

לכן לכל $\alpha > \alpha_0$ נמצא שגוב: $\alpha_0 \sum p_i u(x_i) + (1-\alpha_0) \sum r_i u(x_i) = \sum q_i u(x_i)$

ולכן כתלות ב α_0 שנבחר נוכל לומר שתמיד הרציפות מתקיים.

Scanned with CamScanner

(4) אי תלות - $\sum p_i u(x_i) \geq \sum q_i u(x_i) \leftarrow p \geq q$

$$\alpha \sum p_i u(x_i) + (1-\alpha) \sum r_i u(x_i) \geq \alpha \sum q_i u(x_i) + (1-\alpha) \sum r_i u(x_i)$$

$$\forall \alpha \in (0,1) \quad \alpha \cdot p + (1-\alpha) \cdot r \geq \alpha \cdot q + (1-\alpha) \cdot r$$

$$\sum p_i u(x_i) \geq \sum q_i u(x_i) \leftrightarrow p \geq q$$

הוכחה (בהינתן יחס העדפה $\geq$ שמקיים 4 התכונות הוא בהכרח יחס העדפה של תוחלת תועלת): במחברת Ü

יחס לסיכון:

הנחות: • הפרס מאוקסם תוחלת תועלת. • קבוצת התוצאות X הוא קבוצה של מספרים.

• בהינתן הגרלה P $(p_1 \dots p_n)$ על קבוצת התוצאות X:

תוחלת התועלת של הפרס מהגרלה: $U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$

תוחלת ההגרלה P: $E(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

התוצאה ה i-חייבת להיות מספר לפי הנחה 2.

שונאי סיכון - לכל הגרלה P הפרט מעדיף לקבל את תוחלת ההגרלה בוודאות

על פני השתתפות בהגרלה. $u(E(P)) > U(P) \quad \forall P$.

• אם נצא לו בהסתברות 1, 49; לא נצא במאה יחד. $50 \xrightarrow{1} > \begin{cases} 10 & \frac{1}{2} \\ 90 & \frac{1}{2} \end{cases}$

אוהבי סיכון - לכל הגרלה P הפרט מעדיף הגרלה על פני קבלת התוחלת שלה בוודאות.

$$u(E(P)) < U(P) \quad \forall P$$

אדישים לסיכון - לכל הגרלה P הפרט אדיש בין ההגרלה ובין קבלת התוחלת שלה בוודאות.

$$u(E(P)) = U(P) \quad \forall P$$

שווה הערך הוודאי להגרלה - תוצאה Z תיקרא שווה הערך הוודאי לגרלה P

אם $u(Z) = U(P)$. כלומר, אם הפרט אדיש בין קבלת Z בוודאות ובין הגרלה P

נסמן $Z = CE(P)$. שווה הערך הוודאי קיים כי אנו מניחים יחס העדפה תוחלת

תועלת $CE(P) \xrightarrow{1} \sim \begin{cases} 10 & 0.5 \\ 90 & 0.5 \end{cases}$

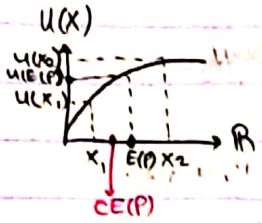
• שווה הערך הוודאי הוא הסכום הגבוה ביותר שנסכים לוותר עליו בעדיפות להגרלה.

בהינתן שקולים: פרט ששונאי סיכון מקיים $CE(P) < E(P)$.

פרט שאוהבי סיכון מקיים $CE(P) > E(P)$.

פרט שאדישים לסיכון מקיים $CE(P) = E(P)$.

Scanned with CamScanner



פרס שווה סיכון אם פונקציית התועלת שלו קעורה -

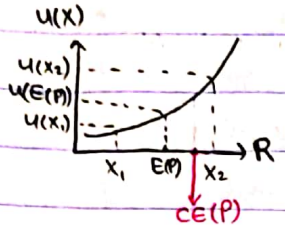
• קעורה = הקו המחבר בין 2 נק' על העקומה עובר מתחת לעקומה

• $P: \begin{cases} x_1 & 0.5 \\ x_2 & 0.5 \end{cases}$ • תוחלת ההגרלה - בדיוק באמצע $u(CE(P)) = \frac{1}{2}u(x_1)+\frac{1}{2}u(x_2)$

x_1 ! x_2 כמה הפרסים מהגרלה.

• התועלת מלקבל פרס שפוגה מתוחלת התועלת ← שנאות סיכון.

מונחי בר x • שווה הערך הוודאי הקטן מתוחלת התועלת של ההגרלה.



פרס אוהב סיכון אם פונקציית התועלת שלו קמורה -

• קמורה = הקו המחבר בין 2 נק' על העקומה עובר מעל העקומה.

• שווה הערך הוודאי גדול מתוחלת התועלת של ההגרלה.

• התועלת מלקבל פרס הקטנה מתוחלת התועלת של ההגרלה ← אוהבת סיכון.

פרס אדיש לסיכון אם פונקציית התועלת שלו ליניארית -

התועלת מהפרס = הפרס. $u(x)=\alpha x+\beta$

• מקסום תוחלת הרווח אם $u(x)=x$. $\alpha>0$ ← כלומר שהפרס יותר גדול התוחלת יותר גבוהה.

הוכחה: בהינתן הגרלה P על x

$$U(P)=\sum P_i u(x_i)=\sum P_i(\alpha x_i+\beta)=\alpha\cdot\underbrace{\sum P_i u(x_i)}_{=E(P)}+\beta\underbrace{\sum P_i}_{=1}=\alpha E(P)+\beta=U(E(P))$$

• פרס 1 יקר יותר שנגרם סיכון מפרס 2 אם לכל הגרלה P יתקיים: $CE_1(P)<CE_2(P)$

מדד שנאות סיכון מוחלטת Arrow Partt:

• שנאות הסיכון של פרט עם פונ' תועלת u בנקודה x - $r(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}$

תכונות:

(1) אם הפרט אדיש לסיכון אזי $r(x)=0$ $\forall x$. $u(x)=\alpha x+\beta$ ← $u''(x)=0$

(2) מדד שנאות הסיכון אינו משתנה עבור פונ' תועלת אחרת המייצגת את אותו יחס העדפה, (ההכפלה בהטרוג הטמאדם זה ככה).

(3) אם פרט 1 הוא יותר שונא סיכון מפרט 2 אזי: $r_1(x)>r_2(x)$ $\forall x$.

(הגדרת השונאות שלגיות של שונא סיכון).

Scanned with CamScanner

תורת המשחקים:

המטרה- לבנות מודל להחלטה של הפרט במסביבה אינטרקטיבית.
כלומר, שהחלטה שלו תהיה תלויה גם באחרים.

המודל -

N- קבוצת השחקנים $N=\{1,2,\dots n\}$

לכל שחקן i $(i\in N)$ נסמן: • S_i- קבוצת האסטרטגיות של שחקן i.

• נסמן ב S $S=S_1\times S_2\times\dots S_n$ (כל הצרופים האפשריים לפעולות)

• קבוצת כל וקטורי האסטרטגיות של השחקנים: $S\in(S_1,S_2,\dots,S_n)=S$

• לכל שחקן i קיימת פונקציה $u_i: S\to R$ המתארת את הרצויות שלו לפי התוצאות.

למשל בדוגמת האסירים: $N=\{1,2\}$ $S_1=S_2=\{$להודות, לא להודות$\}$

$S=\{\{$מודה, מודה$\},\{$לא מודה, לא מודה$\},\{$מודה, לא מודה$\},\{$לא מודה, מודה$\}\}$

$u_1=(\text{להודות, לא להודות})=20$, $u_2=(\text{להודות, לא להודות})=-10$

אסטרטגיה שנשלטת חזק- אסטרטגיית S_i לשחקן i נשלטת חזק אי אסטרטגיה t_i אם לכל צירוף אסטרטגי של השחקנים האחרים היא נותנת תועלת קטנה ממש.

$u_i(s_i,s_{-i})<u_i(t_i,s_{-i})$

• סדר המחיקה אינו משנה כשמוחקים אסטרטגיות נשלטות חזק.

לכל הפעולות שיש לכל השחקן

אסטרטגיה דומיננטית- אסטרטגיית S_i לשחקן i תקרא דומיננטית אם כל אסטרטגיה אחרת שלו נשלטת חזק אי S_i. (בדוגמת האסיר למשל, תמיד היה עדיף להודות).

• שחקן רציונלי לא ישחק אסטרטגיה שנשלטת חזק.

• לכל תועלות מצמידים מספר. ככל שהיא יותר גבוה הוא יותר טוב.

תועלות המשחק- אם לכל השחקנים יש אסטרטגיה דומיננטית אזי צירוף האסטרטגיות שבו כל אחד מהם משחק את האסטרטגיה הדומיננטית יקרא תועלות המשחק.

אסטרטגיה שנשלטת חלש- אסטרטגיה S_i של שחקן i נשלטת חלש אי האסטרטגיה t_i אם לכל צירוף אסטרטגיה של השחקנים האחרים, S_{-i}, מתקיים:

$u_i(s_i,S_{-i})\le u_i(t_i,S_{-i})$

וקיים לפחות צירוף אסטרטגי אחד של השחקנים האחרים t_{-i} שעבורו:

$u_i(s_i,S_{-i})<u_i(t_i,t_{-i})$

תועלות שניתנת לרציונליזציה- תועלות (צירוף אסטרטגי) השרדת כתועלות יחידה תהליך מחיקה של אסטרטגיות נשלטות חלש.

• סדר המחיקה של אסטרטגיה נשלטת חלש משנה!

Scanned with CamScanner

מכרז מחיר שני - יש חפץ המוצע לעכירה לקבוצה של קונים. לכל קונה i יש ערך פרטי V_i לחפץ. (ערך= המחיר המקסימלי שמוכן לשלם עליו). לקוח יהיה מרוצה כשיצליח להנות בפחות מהשווי. כל קונה נותן הצעת מחיר במעטפה סגורה. כזכה הוא מציע ההצעה הגבוהה ביותר והוא משלם את המחיר השני בגובהו.

הגדרות פרמטרים:

- הקונים (קבוצת השחקנים) - N.
- אוסטרטגיה לשחקן i היא הצעה בין 0 לאפס: $S=(0,\infty)$
- שווי החפץ עבור שחקן i - V_i. • תועלת לשחקן i:

אם ההצעה של שחקן i היא הגבוהה ביותר: $b_i > b_j \ \forall j$
$u_i = V_i - \max_{i \neq j}(b_j)$

אם קיים j כך ש $b_j > b_i$ הקונה שלו זוכה: $u_i = 0$

אם $b_i = \max_j(b_j)$ וקיימת הצעות נוספות השוות ל b_i (מי הצעות הכי גבוהות, נגרל בהסתברות $\frac{1}{n}$ לזכיה)
$u_i = \frac{1}{n}(V_i - b_i)$

טענה: האוסטרטגיה $b_i = V_i$ שולטת חלש על כל אוסטרטגיה אחרת במשחק.
הוכחה: $b_i > V_i$ נשלטת ע"י $b_i = V_i$. נראה שהאוסטרטגיה להציע מחיר נמוך מהשווי $b_i < V_i$ נשלטת חלש ע"י האוסטרטגיה $b_i = V_i$.

- ההוכחה אומרת שלכל שחקן יש אוסטרטגיות ששולטות חלש על כולן והיא להגדיר את השווי.
- האוסטרטגיה להציע את השווי שלו שולטת חלש על כל אוסטרטגיה במשחק.

מה קורה כאשר אין אוסטרטגיות נשלטות?

תגובה טובה ביותר- אסטרטגיה S_i של שחקן i היא תגובה טובה ביותר לפרופיל S_{-i} של השחקנים האחרים אם מתקיים: $u_i(S_i, S_{-i}) \geq u_i(t_i, S_{-i}) \ \forall t_i, S_i$

שווי משקל נאש- פרופיל אוסטרטגיות $S=(S_1 \dots S_n)$ הוא שמ"נ אם S_i היא תשב"ל לכל שחקן i.

(אם אנו בתור שחקן 2 בחר B אבל כבר ידוע ששחקן 1 יבחר B - כי זה המקסימום וכל אם שחקן 1 בוחר B - עדיף ששחקן 2 יבחר A).

- כשמשחקים ומחפשים אוסטרטגיות נשלטות חזק בטוח שאו נמחק שמ"נ נאש.

טענה: פרופיל אוסטרטגיות שמ"נ נאש שורד תהליך מחיקה של אוסטרטגיות נשלטות חזק אם בתהליך שורדת תוצאה יחידה היא בהכרח שמ"נ נאש והיא שמ"נ נאש היחידה במשחק.

- כשמוחקים אוסטרטגיות נשלטות חלש שמ"נ נאש יכול להימחק.

Scanned with CamScanner

תחרות הורנו – שתי פירמות מייצרות אותו מוצר. נניח שכבר שהן מייצרות כמות יותר גדולה כך המחיר לא יותר הטוב. נניח אי שוק לינארית ורציפה.

- אם הפירמות היו מתנהגות כקרטל, הן יכלו לעסוק כיוון דבריים. כמצבות התחרות עקבו מחיר גבוה יותר.

Matching Pennies – נתונים לשני שחקנים מטבע וצוומרים להם להניח אותו על השולחן כשצד אחד כלפי מעלה. שחקן 1 רוויח אם שניהם ישימו אותו צד ושחקן 2 ירוויח אם ישימו צדדים הפוכים.

- בדוגמאו הזו אין בכלל שום נאש.
- אין לא אחד מהם עושה הזדמנה יש שום נאש.

Scanned with CamScanner